ベアストウ・ヒチコック法について

2021年1月25日 目次へ戻る

2023.1.24 2023.1.31 2023.2.1 2023.2.3 訂正

1、ベアストウ・ヒチコック法とは

n 次の多項式 f(x)を、2 次式と(n-2)次の多項式に因数分解し、f(x)=0 の根(m) を求める方法です。 x^n の項に係数 a_0 が付いている場合は、章末の付録 1 をご覧下さい。

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \bullet \bullet \bullet + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n \cdot \cdot \cdot 1 - 1$$

と言う多項式は、2 次式 $x^2 + px + q$ と、(n-2)次の多項式 g(x)に因数分解出来、

$$f(x) = (x^2 + px + q) \cdot q(x) \cdot \cdot 1 - 2$$

となります。f(x)が $x^2 + px + q$ で割り切れた場合、g(x)は f(x)より 2 次低い多項式になり、 f(x)の次数を n として、

$$g(x) = x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + b_2 x^{n-4} + b_3 x^{n-5} + \bullet \bullet \bullet + b_{n-4} x^2 + b_{n-3} x + b_{n-2} \cdot \cdot \cdot 1 - 3$$

で表されます。2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の根を、根 (M) の公式で求めることにより、f(x) = 0 の根 (M) が 2 つ分ります。g(x)が 3 次式以上の時は g(x)を新しい f(x)として、2 次式による因数分解をくり返します。g(x)が 2 次式以下になって終了し、f(x)=0 の根 (M) を (M) を (M) を (M) を使い、1 (M) の因数分解が出来ます。(M) 根を使います。(M) ところが 2 次式 (M) ところが 2 次式 (M) と (M) の (M) を (M) の (M) を (M) の (M) を (M) の (M) を (M) の (M)

$$f(x) = (x^2 + px + q) \cdot g(x) + rx + s \cdot \cdot \cdot 1 - 4$$

の様に、余り r x+s が出ます。余りは必ず 1 次式または 0 次式 (定数) です。余りが 2 次式 なら、まだ割れるからです。余りが出る時、1-③式、1-④式から f(x)は、

$$f(x) = (x^{2} + px + q) \bullet g(x) + rx + s$$

$$= (x^{2} + px + q) \bullet (x^{n-2} + b_{1}x^{n-3} + b_{2}x^{n-4} + b_{3}x^{n-5} + \bullet \bullet \bullet$$

$$+ b_{n-4}x^{2} + b_{n-3}x + b_{n-2}) + rx + s$$

$$= (x^{2} + px + q) \bullet x^{n-2} + (x^{2} + px + q) \bullet b_{1}x^{n-3} + (x^{2} + px + q) \bullet b_{2}x^{n-4}$$

$$+ (x^{2} + px + q) \bullet b_{3}x^{n-5} + \bullet \bullet \bullet + (x^{2} + px + q) \bullet b_{n-4}x^{2}$$

$$+ (x^{2} + px + q) \bullet b_{n-3}x + (x^{2} + px + q) \bullet b_{n-2} + rx + s$$

$$= x^{n} + px^{n-1} + qx^{n-2} + b_{1}x^{n-1} + pb_{1}x^{n-2} + qb_{1}x^{n-3} + b_{2}x^{n-2} + pb_{2}x^{n-3} + qb_{2}x^{n-4}$$

$$+ b_{3}x^{n-3} + pb_{3}x^{n-4} + qb_{3}x^{n-5} + \bullet \bullet \bullet + b_{n-4}x^{4} + pb_{n-4}x^{3} + qb_{n-4}x^{2}$$

$$+ b_{n-3}x^{3} + pb_{n-3}x^{2} + qb_{n-3}x + b_{n-2}x^{2} + pb_{n-2}x + qb_{n-2} + rx + s$$

$$= x^{n} + (p + b_{1})x^{n-1} + (q + pb_{1} + b_{2})x^{n-2} + (qb_{1} + pb_{2} + b_{3})x^{n-3} + \bullet \bullet \bullet$$

$$+ (qb_{n-4} + pb_{n-3} + b_{n-2})x^{2} + (qb_{n-3} + pb_{n-2} + r)x + qb_{n-2} + s$$

と表されます。1-①式 f(x) の各係数 a_n と、この x^2+px+q と g(x)と余り rx+s で表され た結果を比較しますと、

$$a_{1} = p + b_{1}$$

$$a_{2} = q + pb_{1} + b_{2}$$

$$a_{3} = qb_{1} + pb_{2} + b_{3}$$

$$a_{j} = qb_{j-2} + pb_{j-1} + b_{j}$$

$$j = 3,4, \cdot \cdot \cdot n - 3, n - 2$$

$$n (\ddagger 1 - 1) \equiv 0 n$$

$$a_{n-2} = qb_{n-4} + pb_{n-3} + b_{n-2}$$

$$a_{n-1} = qb_{n-3} + pb_{n-2} + r$$

$$a_{n} = qb_{n-2} + s$$

になります。移項しますと、g(x)の各係数 bn および r、s は下式の様になります。

1-6式中 $a_1 \sim a_n$ の値は 1-1式で既知です。 b_1 の値には a_1 の値と p の値が必要です。

 b_2 の値には a_2 の値と b_1 の値と q の値も必要です。以下 b_3 の値から r までの値には、同じ番号の a の値、ひとつ前の b の値と p の値、ふたつ前の b の値と q の値も必要です。s の値には a_n と b_{n-2} と q の値が必要です。b の値は、上から順に計算しなければなりません。

1-⑥式中の
$$b_i = a_i - pb_{i-1} - qb_{i-2}$$
に $j = n-1$ を代入しますと、

$$b_{n-1}=a_{n-1}-pb_{n-2}-qb_{n-3}$$
 になり $1-⑥式中の r=a_{n-1}-pb_{n-2}-qb_{n-3}$ と同じですので、余りの r は、 $r=b_{n-1}$

と表されます。また、同じく $b_i = a_i - pb_{i-1} - qb_{i-2}$ の式にj=n を代入しますと、

$$b_n = a_n - pb_{n-1} - qb_{n-2}$$
 になり 1一⑥式中の $s = a_n - qb_{n-2}$ の式と比較しますと、余りの s は、 $s = b_n + pb_{n-1}$

と表されます。1-⑥式を次の様に修正します

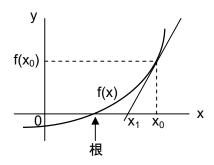
1-⑦式から分ります様に、余りの r と s の式は、どちらも p と q、2 つの変数による 2 変数関数です。関数 r と関数 s を、r(p,q)、s(p,q)と表せます。

余りを無くす為には、r(p,q)=0 と s(p,q)=0 が両方とも成り立つ、p の値と q の値を探す必要があります。

2、ニュートン・ラフソン法

1 変数関数の f(x)=0 が成り立つ x の値、つまり f(x)=0 の根を探す方法に、ニュートン・ラフソン法があります。最初にニュートン・ラフソン法の説明をします。その後 2 変数関数に対する拡張方法を提示致します。

ニュートン・ラフソン法では f(x)=0 の根の値に近い初期値、 x_0 を適当に決めます。



 x_0 での f(x)の値、座標 $\{x_0,f(x_0)\}$ で f(x)の接線を引きます。接線が x 軸と交わる点を x_1 とします。座標 $\{x_0,f(x_0)\}$ における接線の方程式は、

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

です。「接線の方程式」の導出方法は、章末の付録 2 をご参照下さい。 $f'(x_0)$ とは f(x)を微分してから x_0 を代入する意味です。この接線は座標 $(x_1,0)$ を通ります。 $x=x_1$ 、y=0 を接線の方程式に代入して、 x_1 を表す式に変形しますと、

$$0-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$$

$$x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \cdot \cdot \cdot \cdot 2 - 1$$

になります。これをニュートン・ラフソンの公式と言います。上のグラフの例では $f(x_0)$ は 正、 $f'(x_0)$ も正ですので、分数は正となり、 x_1 は x_0 よりも小さく、原点側になります。したがって x_1 は f(x)=0 の正しい根に近づきます。

計算で出た x_1 を新しい x_0 として、同様の計算をくり返します。何回もくり返すことにより、 x_1 を正しい根に限りなく近づけることが出来ます。 $f(x_0)$ が十分に小さくなった時に止めます。 これが、1 変数関数の f(x)=0 の根を探すニュートン・ラフソン法です。ところで、

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$$

と置き、ニュートン・ラフソンの公式に代入しますと

$$\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)}{\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)}$$

$$\Delta \mathbf{X} = -\frac{\mathbf{f}(\mathbf{X}_0)}{\mathbf{f}'(\mathbf{X}_0)}$$

になります。さらに変形しますと、

$$f'(x_0)\Delta x = -f(x_0)$$

または、

$$f(x_0) + f'(x_0) \Delta x = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 2 - 2$$

になります。この方程式に適当に選んだ初期値 x_0 を代入し、未知数 Δx を求めます。元の x_0 に Δx を加えた新しい x_0 を再び方程式に代入し、新しい Δx を求めます。これをくり返し、 Δx を限りなく 0 に近づけることにより、 x_0 を限りなく f(x)=0 の正しい根に近づけることが 出来ます。 Δx が十分に小さくなった時に止めます。 新 x_0 は旧 x_0 より原点側に来るのが普通ですので、 Δx はマイナスの値になるのが一般的です。この方法も 1 変数関数の f(x)=0 の根を探す、ニュートン・ラフソン法です。

こちらのやり方を 2 変数関数に拡張します。章末の付録 4 に詳しい説明があります。余りの関数において、r(p,q)=0 と s(p,q)=0 が同時に成り立ち、余りが無くなる p と q の値(r=0、s=0 の根)を探す式は、適当に決めた p と q の初期値を p_0 と q_0 として、

$$\begin{split} & r(p_0,q_0) + \frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0) \Delta p + \frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0) \Delta q = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 2 - \textcircled{3} \\ & s(p_0,q_0) + \frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0) \Delta p + \frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0) \Delta q = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 2 - \textcircled{4} \end{split}$$

となります。上式中、例えば $\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$ とは、r(p,q)をp で偏微分してから p_0,q_0 を代入する意味です。r(p,q)と s(p,q)を移項しますと、

$$\begin{split} &\frac{\partial \, r}{\partial \, p} \big(p_0, q_0 \big) \Delta p + \frac{\partial \, r}{\partial \, q} \big(p_0, q_0 \big) \Delta q = - r \big(p_0, q_0 \big) \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, 2 - \text{\textcircled{5}} \\ &\frac{\partial \, s}{\partial \, p} \big(p_0, q_0 \big) \Delta p + \frac{\partial \, s}{\partial \, q} \big(p_0, q_0 \big) \Delta q = - s \big(p_0, q_0 \big) \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, \cdot \, 2 - \text{\textcircled{6}} \end{split}$$

になります。1 変数時の微分の所が偏微分 2 つになります。未知数が Δp と Δq の 2 つですので式も 2 つ要り、連立方程式になります。適当に決めた初期値 p_0 と q_0 を代入し、連立方程式を解き Δp と Δq を求めます。 p_0 に Δp 、 Q_0 に Δq を加えた値は真の根に近づいているは

ずです。新しい p_0 、 q_0 として再び方程式に代入し、新しい Δp と Δq を求めます。これをくり返し Δp と Δq を限りなく 0 に近づけることにより、 p_0 と q_0 が r=0 と s=0 \mathcal{O} 正しい根、p と q に限りなく近づきます。q と q が十分に小さくなった時に止めます。この作業に必要なものは、

- ・余りの関数 r(p,q)を p で偏微分し、p と q の初期値 p_0 と q_0 を代入したもの。
- ・余りの関数 r(p,q)を q で偏微分し、p と q の初期値 p₀ と q₀ を代入したもの。
- ・余りの関数 s(p,q)を p で偏微分し、p と q の初期値 p_0 と q_0 を代入したもの。
- ・余りの関数 s(p,q)を q で偏微分し、p と q の初期値 p_0 と q_0 を代入したもの。
- ・初期値 p₀ と q₀ における余りの関数 r の値 r(p₀,q₀)。
- ・初期値 p₀ と q₀ における余りの関数 s の値 s(p₀,q₀)。

です。偏微分のやり方につきましては、章末の付録3をご覧下さい。

3、偏微分

1-①式の a_n は完全な定数で、p も q も入っていません。一方、1-⑦式の b_n の中身は a_n と p と q ですから、 b_n を偏微分する場合、 b_n の中身を全部さらけ出してから p や q で偏微分を行わなければなりません。1-⑦式の b_1 から順番に偏微分して行きます。

(1) b を p で偏微分

① $b_1 = a_1 - p e p で偏微分します。$

$$\frac{\partial b_1}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (a_1 - p)$$
$$= -1$$

です。

② $b_2 = a_2 - pb_1 - q$ を p で偏微分します。1一⑦式により $b_1 = a_1 - p$ ですから、 b_2 式中の b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_2}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (a_2 - pb_1 - q)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} \{a_2 - p(a_1 - p) - q\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} (a_2 - pa_1 + p^2 - q)$$

$$= -a_1 + 2p$$

になります。偏微分後 1-5式の $a_1 = p + b_1$ を代入し、

$$= -(p + b_1) + 2p$$

$$= -b_1 + p$$

$$= -(b_1 - p)$$

となります。

③ $b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$ を p で偏微分します。1 - ⑦式により $b_2 = a_2 - pb_1 - q$ であり、 $b_1 = a_1 - p$ ですから、 b_3 式中の b_2 、 b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_3}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (a_3 - pb_2 - qb_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} [a_3 - p\{a_2 - p(a_1 - p) - q\} - q(a_1 - p)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} \{a_3 - p(a_2 - a_1p + p^2 - q) - a_1q + pq\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} (a_3 - a_2p + a_1p^2 - p^3 + pq - a_1q + pq)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} (a_3 - a_2p + a_1p^2 - p^3 + 2pq - a_1q)$$

$$= -a_2 + 2a_1p - 3p^2 + 2q$$

になります。偏微分後 1-⑤式の $a_2 = b_2 + pb_1 + q$ 、 $a_4 = b_4 + p$ を代入し、

$$= -(b_2 + pb_1 + q) + 2p(b_1 + p) - 3p^2 + 2q$$

$$= -b_2 - pb_1 - q + 2pb_1 + 2p^2 - 3p^2 + 2q$$

$$= -b_2 + pb_1 - p^2 + q$$

$$= -b_2 + p(b_1 - p) + q$$

となります。

④ $b_4 = a_4 - pb_3 - qb_2$ を p で偏微分します。 $1 - ⑦式により b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$ 、 $b_2 = a_2 - pb_1 - q$ 、 $b_1 = a_1 - p$ ですから、 b_4 式中の b_3 、 b_2 、 b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_4}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (a_4 - pb_3 - qb_2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial p} [a_4 - p\{a_3 - p(a_2 - p(a_1 - p) - q) - q(a_1 - p)\} - q\{a_2 - p(a_1 - p) - q\}]$$

$$\begin{split} &=\frac{\partial}{\partial\,p}\big\{a_4-p(a_3-pa_2+a_1\!p^2-p^3+2pq-a_1\!q)-q(a_2-a_1\!p+p^2-q)\big\}\\ &=\frac{\partial}{\partial\,p}\big(a_4-pa_3+p^2a_2-p^3a_1+p^4-2p^2q+pqa_1-a_2q+a_1pq-p^2q+q^2\big)\\ &=\frac{\partial}{\partial\,p}\big(a_4-pa_3+p^2a_2-p^3a_1+p^4-3p^2q+2pqa_1-qa_2+q^2\big)\\ &=-a_3+2pa_2-3p^2a_1+4p^3-6pq+2qa_1\\ \hline\mathfrak{C}_{}\mathfrak{F}_{},\\ &=(b_3+pb_2+qb_1)+2p(b_2+pb_1+q)-3p^2(b_1+p)+4p^3-6pq+2q(b_1+p)\\ &=-b_3-pb_2-qb_1+2pb_2+2p^2b_1+2pq-3p^2b_1-3p^3+4p^3-6pq+2qb_1+2pq\\ &=-b_3+p(b_2-pb_1+p^2-q)+q(b_1-p)\\ &=-b_3+p(b_2-pb_1+p^2-q)+q(b_1-p)\\ &=-b_3+p\{b_2-p(b_1-p)-q\}+q(b_1-p)\\ \end{split}$$

となります。この先のpでの偏微分の計算は省略致します。

(2) b を q で偏微分

b₁から順番に q で偏微分して行きます。

① b₁ = a₁ - p を q で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_1}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (a_1 - p)$$
$$= 0$$

です。

② $b_2 = a_2 - pb_1 - q$ を q で偏微分します。1 - ⑦式により $b_1 = a_1 - p$ ですから、 b_2 式中の b_1 に代入し q で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_2}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (a_2 - pb_1 - q)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} \{a_2 - p(a_1 - p) - q\}$$
$$= \frac{\partial}{\partial q} (a_2 - pa_1 + p^2 - q)$$
$$= -1$$

です。

③ $b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$ を q で偏微分します。1 - ⑦式により $b_2 = a_2 - pb_1 - q$ であり、 $b_1 = a_1 - p$ ですから、 b_3 式中の b_2 、 b_1 に代入し q で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_3}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (a_3 - pb_2 - qb_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} [a_3 - p\{a_2 - p(a_1 - p) - q\} - q(a_1 - p)]$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} \{a_3 - p(a_2 - a_1p + p^2 - q) - a_1q + pq\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} (a_3 - a_2p + a_1p^2 - p^3 + pq - a_1q + pq)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q} (a_3 - a_2p + a_1p^2 - p^3 + 2pq - a_1q)$$

$$= 2p - a_1$$

です。偏微分後 1-⑤式の a₁ = b₁ + p を代入し、

$$= 2p - (b_1 + p)$$

$$= 2p - b_1 - p$$

$$= -b_1 + p$$

$$= -(b_1 - p)$$

です。

④ $b_4 = a_4 - pb_3 - qb_2$ を q で偏微分します。 $1 - ⑦式により b_3 = a_3 - pb_2 - qb_1$ 、 $b_2 = a_2 - pb_1 - q$ 、 $b_1 = a_1 - p$ ですから、 b_4 式中の b_3 、 b_2 、 b_1 に代入し p で偏微分しますと、

$$\frac{\partial b_4}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} (a_4 - pb_3 - qb_2)$$

$$\begin{split} &=\frac{\partial}{\partial\,q}[a_4-p\{a_3-p(a_2-p(a_1-p)-q)-q(a_1-p)\}-q\{a_2-p(a_1-p)-q\}]\\ &=\frac{\partial}{\partial\,q}\{a_4-p(a_3-pa_2+a_1p^2-p^3+2pq-a_1q)-q(a_2-a_1p+p^2-q)\}\\ &=\frac{\partial}{\partial\,q}\{a_4-pa_3+p^2a_2-p^3a_1+p^4-2p^2q+pqa_1-a_2q+a_1pq-p^2q+q^2)\\ &=\frac{\partial}{\partial\,q}(a_4-pa_3+p^2a_2-p^3a_1+p^4-3p^2q+2pqa_1-qa_2+q^2)\\ &=\frac{\partial}{\partial\,q}(a_4-pa_3+p^2a_2-p^3a_1+p^4-3p^2q+2pqa_1-qa_2+q^2)\\ &=-3p^2+2pa_1-a_2+2q\\ &=-3p^2+2pa_1-a_2+2q\\ &=-3p^2+2p(b_1+p)-(b_2+pb_1+q)+2q\\ &=-3p^2+2p(b_1+p)-(b_2+pb_1+q)+2q\\ &=-3p^2+2pb_1+2p^2-b_2-pb_1-q+2q\\ &=-p^2+pb_1-b_2+q\\ &=-b_2+p(b_1-p)+q \end{split}$$

です。この先のqでの偏微分の計算は省略致します。

(3)、偏微分のまとめ

偏微分の計算結果を再度提示しますと、

$$\begin{split} \frac{\partial b_1}{\partial p} &= -1\\ \frac{\partial b_2}{\partial p} &= -(b_1 - p)\\ \frac{\partial b_3}{\partial p} &= -b_2 + p(b_1 - p) + q\\ \frac{\partial b_4}{\partial p} &= -b_3 + p\{b_2 - p(b_1 - p) - q\} + q(b_1 - p) \end{split}$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial b_2}{\partial q} = -1$$

$$\frac{\partial b_3}{\partial q} = -(b_1 - p)$$

$$\frac{\partial b_4}{\partial q} = -b_2 + p(b_1 - p) + q$$

になります。q での偏微分は、1 つ若い番号の p での偏微分と同じ結果です。また、式のカッコ内に、直前または 2 つ前に計算した偏微分の結果の符号を反転した式が入っています。

偏微分の結果の符号を初めから反転して、
$$-\frac{\partial b_j}{\partial p} = -\frac{\partial b_{j+1}}{\partial q} = c_{j-1}$$
 とおけば、

$$\begin{split} -\frac{\partial \, b_1}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_2}{\partial \, q} = c_0 = 1 \\ -\frac{\partial \, b_2}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_3}{\partial \, q} = c_1 = b_1 - p \\ -\frac{\partial \, b_3}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_4}{\partial \, q} = c_2 = b_2 - p c_1 - q \\ -\frac{\partial \, b_4}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_5}{\partial \, q} = c_3 = b_3 - p c_2 - q c_1 \\ -\frac{\partial \, b_j}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_{j+1}}{\partial \, q} = c_{j-1} = b_{j-1} - p c_{j-2} - q c_{j-3} \\ &\qquad \qquad j = 4, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot n \\ &\qquad \qquad n \, \text{if } 1 - \text{Total} \, \text{On} \end{split}$$

$$-\frac{\partial \, b_{n-2}}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_{n-1}}{\partial \, q} = c_{n-3} = b_{n-3} - p c_{n-4} - q c_{n-5} \\ -\frac{\partial \, b_{n-1}}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_n}{\partial \, q} = c_{n-2} = b_{n-2} - p c_{n-3} - q c_{n-4} \\ -\frac{\partial \, b_n}{\partial \, p} &= -\frac{\partial \, b_{n+1}}{\partial \, q} = c_{n-1} = b_{n-1} - p c_{n-2} - q c_{n-3} \end{split}$$

となります。ベアストウ・ヒチコック法では、c の番号を 0 から置くのが一般的です。 c_0 は 1-①式の n が 3 の時に必要です。

bの偏微分の各値は c を計算し、符号を反転し、番号を調整したものになります。

$$b_{j}$$
の p での偏微分 $\frac{\partial b_{j}}{\partial p}$ は、 $-c_{j-1}$ を使用します。

$$\mathbf{b}_{\mathbf{j}}$$
の q での偏微分 $\frac{\partial \mathbf{b}_{\mathbf{j}}}{\partial \mathbf{q}}$ では $-\mathbf{c}_{\mathbf{j}-2}$ を使用します。

cも、後のcに前のcの値が入るので、上から順に計算していかなければいけません。

4、ベアストウ・ヒチコック法の計算

準備が出来ましたので実際の計算を行います。、ニュートン・ラフソンの公式を2変数関数に拡張した式を再掲します。

$$\begin{split} & r(p_0,q_0) + \frac{\partial \, r}{\partial \, p}(p_0,q_0) \Delta p + \frac{\partial \, r}{\partial \, q}(p_0,q_0) \Delta q = 0 \, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 4 - \text{①} \, (2 - \text{③と同じ}) \\ & s(p_0,q_0) + \frac{\partial \, s}{\partial \, p}(p_0,q_0) \Delta p + \frac{\partial \, s}{\partial \, q}(p_0,q_0) \Delta q = 0 \, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 4 - \text{②} \, (2 - \text{④と同じ}) \end{split}$$

4-①式の左辺第 1 項 $\mathbf{r}(\mathsf{p}_0,\mathsf{q}_0)$ は、1-⑦式より $\mathsf{b}_\mathsf{n-1}$ です。1-⑦式を計算する途中で初期

値
$$p_0$$
、 q_0 は入力されます。第 2 項の偏微分は $3-$ ①式より、 $\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = -c_{n-2}$ です。 $3-$ ①

式を計算する途中で初期値 p_0 、 q_0 は入力されます。第 3 項の偏微分は 3-①式より、

$$\dfrac{\partial \ b_{n-1}}{\partial \ q} = -c_{n-3}$$
です。 $3-1$ 式を計算する途中で初期値 p_0 、 q_0 は入力されます。

各値を4一①式に代入しますと、

$$b_{n-1} + (-c_{n-2})\Delta p + (-c_{n-3})\Delta q = 0$$

$$b_{n-1}-c_{n-2}\Delta p-c_{n-3}\Delta q=0\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot4-\textcircled{3}$$

になります。次に 4ー②式の左辺第 1 項、 $\mathbf{s}(p_0,q_0)$ は、1ー⑦式より $\mathbf{b}_{\mathbf{n}} + \mathbf{p}\mathbf{b}_{\mathbf{n-1}}$ です。1ー⑦

式を計算する途中で初期値 p₀、q₀は入力されます。

第 2 項は 1-⑦式より、 $\mathbf{b}_{n} + \mathbf{p}\mathbf{b}_{n-1}$ の p での偏微分です。 \mathbf{b}_{n} の偏微分は 3-①式より、

 $\frac{\partial \mathbf{b}_{n}}{\partial \mathbf{p}} = -\mathbf{C}_{n-1}$ です。 $\mathbf{p}\mathbf{b}_{n-1}$ は積の偏微分ですから、積の偏微分の公式と、3-①式より、

$$\frac{\partial}{\partial p}(p \cdot b_{n-1}) = \frac{\partial p}{\partial p} \cdot b_{n-1} + p \cdot \frac{\partial b_{n-1}}{\partial p} = b_{n-1} + p \cdot (-c_{n-2}) = b_{n-1} - p \cdot c_{n-2}$$

となります。両者を合わせて、 $-c_{n-1}+b_{n-1}-p\cdot c_{n-2}$ です。計算の途中で初期値 p_0 、 q_0 は入力されます。第 3 項は b_n+pb_{n-1} の q での偏微分です。 b_n の偏微分は 3-①式より、

 $\frac{\partial b_n}{\partial q} = -c_{n-2}$ です。 pb_{n-1} は積の偏微分ですから、積の偏微分の公式と、3-①式より、

$$\frac{\partial}{\partial q}(p \cdot b_{n-1}) = \frac{\partial p}{\partial q} \cdot b_{n-1} + p \cdot \frac{\partial b_{n-1}}{\partial q} = 0 + p \cdot (-c_{n-3}) = -p \cdot c_{n-3}$$

となります。両者を合わせて、 $-\mathbf{c}_{n-2}-\mathbf{p}\cdot\mathbf{c}_{n-3}$ です。計算の途中で初期値 \mathbf{p}_0 、 \mathbf{q}_0 は入力されます。各値を 4-2式に代入し変形して行きますと、

$$\begin{split} &b_n + pb_{n-1} + (-c_{n-1} + b_{n-1} - p \cdot c_{n-2}) \Delta p + (-c_{n-2} - p \cdot c_{n-3}) \Delta q = 0 \\ &b_n + pb_{n-1} - c_{n-1} \Delta p + b_{n-1} \Delta p - p \cdot c_{n-2} \Delta p - c_{n-2} \Delta q - p \cdot c_{n-3} \Delta q = 0 \\ &b_n - c_{n-1} \Delta p + b_{n-1} \Delta p - c_{n-2} \Delta q + pb_{n-1} - p \cdot c_{n-2} \Delta p - p \cdot c_{n-3} \Delta q = 0 \\ &b_n - (c_{n-1} - b_{n-1}) \Delta p - c_{n-2} \Delta q + p(b_{n-1} - c_{n-2} \Delta p - c_{n-3} \Delta q) = 0 \end{split}$$

になります。ここで4番目の式の左辺第4項のカッコ内は、4-③式の左辺と同じですので、 =0です。その為4番目の式の左辺第4項は消滅して、

$$b_n - (c_{n-1} - b_{n-1})\Delta p - c_{n-2}\Delta q = 0 \cdot \cdot \cdot \cdot 4 - 4$$

となります。4一③、4一④式を再び提示しますと、

$$\mathbf{b}_{n-1} - \mathbf{c}_{n-2} \Delta \mathbf{p} - \mathbf{c}_{n-3} \Delta \mathbf{q} = 0$$
 ・・・・4一③と同じ
$$\mathbf{b}_n - (\mathbf{c}_{n-1} - \mathbf{b}_{n-1}) \Delta \mathbf{p} - \mathbf{c}_{n-2} \Delta \mathbf{q} = 0$$
 ・・・・4一④と同じ

です。両式とも左辺第1項を右辺に移項して、両辺に-1をかけますと、

$$\begin{aligned} c_{n-2} \Delta p + c_{n-3} \Delta q &= b_{n-1} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 4 - \textcircled{5} \\ (c_{n-1} - b_{n-1}) \Delta p + c_{n-2} \Delta q &= b_n \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 4 - \textcircled{6} \end{aligned}$$

になり連立方程式が完成しました。この連立方程式をクラーメル (クラメル、クラメール とも呼ばれます。)の解法で解きますと、(クラーメルの解法は章末の付録5をご覧下さい。)

$$\Delta p = \frac{\begin{vmatrix} b_{n-1} & c_{n-3} \\ b_{n} & c_{n-2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{n-2} & c_{n-3} \\ c_{n-1} - b_{n-1} & c_{n-2} \end{vmatrix}} = \frac{b_{n-1}c_{n-2} - b_{n}c_{n-3}}{c_{n-2}^{2} - (c_{n-1} - b_{n-1})c_{n-3}}$$

$$= \frac{b_{n-1}c_{n-2} - b_{n}c_{n-3}}{D}$$

$$\Delta q = \frac{\begin{vmatrix} c_{n-2} & b_{n-1} \\ c_{n-1} - b_{n-1} & b_{n} \\ c_{n-2} & c_{n-3} \\ c_{n-1} - b_{n-1} & c_{n-2} \end{vmatrix}}{c_{n-1} - c_{n-2}} = \frac{c_{n-2}b_{n} - (c_{n-1} - b_{n-1})b_{n-1}}{c_{n-2}^{2} - (c_{n-1} - b_{n-1})c_{n-3}}$$

$$= \frac{c_{n-2}b_{n} - (c_{n-1} - b_{n-1})b_{n-1}}{D}$$

$$D = c_{n-2}^{2} - (c_{n-1} - b_{n-1})c_{n-2}$$

になります。分母の行列式は全く同じなので、Dとして別に計算しています。

最初に決めた p_0 と q_0 にこの Δp 、 Δq を加え、新しい p_0 、 q_0 とします。新しい p_0 、 q_0 を用いて同じ計算を行います。 Δp 、 Δq が十分に小さくなるまでくり返します。

5、計算手順

- (1) pとqの初期値p₀、q₀を決めます。
- (2) 1-⑦式により b₁~b_nを求めます。
- (3) 3-①式により c₀~c_{n-1} を求めます。
- (4) クラーメルの解法により Δp、Δq を求めます。
- (5) Δp、Δq が、あらかじめ決めておいた値より小さい場合は(9)へ飛びます。
- (6) $p_0 + \Delta p$ 、 $q_0 + \Delta q$ を新しい初期値 p_0 、 q_0 にします。
- (7) 決められた回数、計算を行っても Δp 、 Δq が小さくならない場合は(1)へ戻ります。収

束しない場合ですので、 $p \ge q$ の初期値 p_0 、 q_0 を違う値にしてやり直します。

- (8) (2)へ飛びます。
- (9) $x^2 + px + q = 0$ の根(解)を $\frac{-p \pm \sqrt{p^2 4q}}{2}$ で計算します。これにより、f(x) = 0 の根の内の 2 つが分ります。
- (10) 残った b₁~b_nの n が 3 以上ならば再び(1)または(2)へ飛びます。

付録 1、xⁿの項に係数 a₀が付いている場合

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \bullet \bullet + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

の場合は、

$$f(x) = a_0 \left(x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} x^{n-2} + \frac{a_3}{a_0} x^{n-3} + \bullet \bullet \bullet + \frac{a_{n-2}}{a_0} x^2 + \frac{a_{n-1}x}{a_0} + \frac{a_n}{a_0} \right)$$

の様に a_0 を前に出します。カッコ内に出来た式の=0 の根を求めます。因数定理により、その根で因数分解が出来ますから、因数分解後再び a_0 を頭に付けます。

$$f(x) = a_0(x - \alpha)(x - \beta)(x - \delta)(x - \epsilon) \bullet \bullet (x - \varphi)(x - \gamma)(x - \eta)$$

付録 2、接線の方程式の導出

傾きが m で、原点から k 持ち上がった直線の方程式は、

$$y = mx + k$$

です。この直線が点(a,b)を通るとします。上式に代入し、

$$b = ma + k$$

が成り立ちます。この式からkの値が決まり、

$$k = b - ma$$

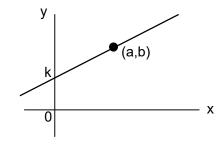
です。最初の式に代入して、

$$y = mx + b - ma$$

となりますが、良い形ではないので、

$$y-b=m(x-a)$$

と変形します。



付録3、偏微分について

2 変数の関数、例えば変数 x と変数 y の関数 f(x,y) ex で偏微分する場合、y を定数と見なして x で普通に微分すれば良いです。

$$f(x,y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$$

の時、この関数をxで偏微分しますと、

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = -2x + y + 2$$

になります。また y で偏微分する場合は、x を定数と見なして y で普通に微分すれば良いです。同じく、

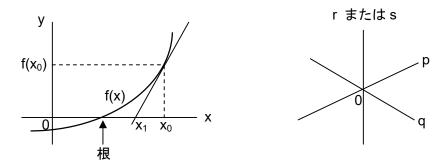
$$f(x,y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x + y$$

の時、この関数をyで偏微分しますと、

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x - 2y + 1$$

になります。

付録 4、ニュートン・ラフソン法の 2 変数関数への拡張



ニュートン・ラフソン法では、適当に決めた x_0 地点での f(x)の微分値を求め、その傾きで接線を引き x 軸との交点 x_1 を求めました。上左図です。 x_1 地点は f(x)=0 の根に近づくのでした。ニュートン・ラフソンの公式を変形した 2-2式、 $f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=0$ により、

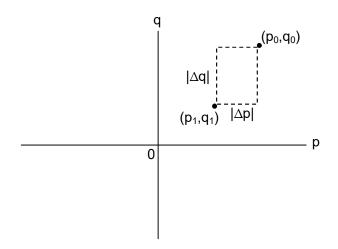
 x_1 地点から微分値 $f'(x_0)$ の勾配で登って行くと、 x_1 と x_0 の差の $|\Delta x|$ 行ったところで $f(x_0)$ に 到達出来ることが分ります。

ベアストウ・ヒチコック法で、余りの r または余りの s の値は、p と q による 2 変数関数でした。上右図の 3 次元の座標になります。

ニュートン・ラフソンの公式 2-②式を2変数関数用に拡張したものが、2-③式の、

$$r(\boldsymbol{p}_{\scriptscriptstyle{0}},\boldsymbol{q}_{\scriptscriptstyle{0}}) + \frac{\partial\,r}{\partial\,\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}_{\scriptscriptstyle{0}},\boldsymbol{q}_{\scriptscriptstyle{0}})\Delta\boldsymbol{p} + \frac{\partial\,r}{\partial\,\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{p}_{\scriptscriptstyle{0}},\boldsymbol{q}_{\scriptscriptstyle{0}})\Delta\boldsymbol{q} = 0$$

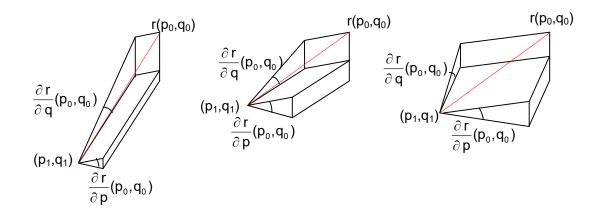
です。1 変数の時と同様に、 (p_0,q_0) 地点から $|\Delta p|$ および $|\Delta q|$ 離れた地点を (p_1,q_1) とします。そこは r(p,q)=0 の根に近づいた地点です。高さは 0 です。そこから、ニュートン・ラフソン法で行ったと同じ様に $r(p_0,q_0)$ に登ってみます。



この時の座標を真上から見たのが上の図です。 (p_1,q_1) 地点の高さは 0 ですが、 (p_0,q_0) 地点には、 $r(p_0,q_0)$ と言う高さがあります。 (p_1,q_1) から $r(p_0,q_0)$ 地点に登る勾配には、 $r(p_0,q_0)$ の偏微分値 $\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$ と $\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)$ を使います。この 2 つは、r(p,q)を p または q で偏微分してから p_0,q_0 を代入したものです。

 $|\Delta p|$ を登る時には p で偏微分した勾配の値、 $\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$ を使います。 $|\Delta q|$ を登る時には q で偏微分した勾配の値、 $\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)$ を使います。 $r(p_0,q_0)$ 地点に到達するには、 (p_1,q_1) と $r(p_0,q_0)$ の間を斜めに登って行くのですが、その斜めの動きの中の p 方向の動きが $|\Delta p|$ であり、q 方向の動きが $|\Delta q|$ です。

p 方向の(勾配×距離) と q 方向の(勾配×距離) の和が、 $r(p_0,q_0)$ 地点に来れば到達成功です。条件はこれだけですから、様々な登り方があります。 $|\Delta p|$ を短くして $|\Delta q|$ を長くしたりなど無数の経路があります。1 変数のニュートン・ラフソン法では、 x_1 地点からの到達ルートは1つだけでしたが、2 変数の場合、 (p_1,q_1) 地点からの到達ルートは無数にあることになります。これでは (p_1,q_1) 地点が定まらず、大変困ります。その例が下の図です。到達ルートは (p_1,q_1) と $r(p_0,q_0)$ を結んだ線(赤色)になります。 $r(p_0,q_0)$ の高さは同じですが、経路の取り方は色々あり、 (p_1,q_1) 地点もバラバラです。



解決策として、もう1つの2変数関数sを用います。2-④式の、

$$s(p_{\scriptscriptstyle 0},q_{\scriptscriptstyle 0}) + \frac{\partial \, s}{\partial \, p}(p_{\scriptscriptstyle 0},q_{\scriptscriptstyle 0}) \Delta p + \frac{\partial \, s}{\partial \, q}(p_{\scriptscriptstyle 0},q_{\scriptscriptstyle 0}) \Delta q = 0$$

です。この式も 2-3式と同じで、この式だけでは (p_1,q_1) 地点が定まりません。こちらにも無数の (p_1,q_1) の候補があります。そこで、2 つの式を連立させます。2-3、2-4式を移項した 2-5、2-6式の連立方程式、

$$\begin{split} &\frac{\partial \, r}{\partial \, p}(p_0,q_0)\Delta p + \frac{\partial \, r}{\partial \, q}(p_0,q_0)\Delta q = -r(p_0,q_0) \\ &\frac{\partial \, s}{\partial \, p}(p_0,q_0)\Delta p + \frac{\partial \, s}{\partial \, q}(p_0,q_0)\Delta q = -s(p_0,q_0) \end{split}$$

になります。この連立方程式を解くことにより、無数にある Δp と Δq の候補値がそれぞれ 1 つに定まります。 p_0 に Δp を加えますと p_1 になります。 q_0 に Δq を加えますと q_1 になります。r と s で同一の (p_1,q_1) 地点が出来ます。

 (p_1,q_1) 地点から $\frac{\partial r}{\partial p}(p_0,q_0)$ の勾配で Δp 進み、更に $\frac{\partial r}{\partial q}(p_0,q_0)$ の勾配で Δq 進みますと、

 $r(p_0,q_0)$ に到達出来ます。 (p_1,q_1) 地点から $\frac{\partial s}{\partial p}(p_0,q_0)$ の勾配で Δp 進み、更に $\frac{\partial s}{\partial q}(p_0,q_0)$ の 勾配で Δq 進みますと、 $s(p_0,q_0)$ に到達出来ます。

この様にして最終的な r(p,q)=0 および s(p,q)=0 の根、真の p と真の q に近づいた同一の (p_1,q_1) 地点が決定されます。この p_1 、 q_1 を新しい p_0 、 q_0 として、新たな Δp 、 Δq を求めて行きます。ニュートン・ラフソン法の 2 変数関数への拡張です。

付録 5、クラーメル (クラメル) (クラメール) の解法 連立 1 次方程式、

$$a_1x + b_1y = c_1 \cdot \cdot \cdot 1$$

 $a_2x + b_2y = c_2 \cdot \cdot \cdot 2$

を解きます。 $(① \times b_2) - (② \times b_1)$ を行いますと、

$$a_{1}b_{2}x + b_{1}b_{2}y = c_{1}b_{2}$$

$$-) a_{2}b_{1}x + b_{1}b_{2}y = c_{2}b_{1}$$

$$a_{1}b_{2}x - a_{2}b_{1}x = c_{1}b_{2} - c_{2}b_{1}$$

$$(a_{1}b_{2} - a_{2}b_{1})x = c_{1}b_{2} - c_{2}b_{1}$$

$$X = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

になります。

$$(1 \times -a_2) - (2 \times -a_1)$$
 を行いますと、

$$-a_{1}a_{2}x - a_{2}b_{1}y = -a_{2}c_{1}$$

$$-) -a_{1}a_{2}x - a_{1}b_{2}y = -a_{1}c_{2}$$

$$-a_{2}b_{1}y + a_{1}b_{2}y = -a_{2}c_{1} + a_{1}c_{2}$$

$$(a_{1}b_{2} - a_{2}b_{1})y = a_{1}c_{2} - a_{2}c_{1}$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

になります。

行列式の計算を次の様に決めます。左上から右下へ掛けた値から、左下から右上へ掛けた値を引き、これを | | の値と決めます。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

a₁ b₁ a₂ b₂

行列式で解く連立1次方程式は、次の様になります。

$$X = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{D}$$

x の行列式の分母は、連立 1 次方程式の x と y の係数をそのまま入れます。x の行列式の分子は、x の係数の代わりに右辺の値 c_1 、 c_2 を入れます。y の係数はそのまま入れます。

y の行列式の分母も、連立 1 次方程式の x と y の係数をそのまま入れます。y の行列式の分子は、x の係数はそのまま入れ、y の係数の代わりに右辺の値 c_1 、 c_2 を入れます。

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{D}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

分母の行列式は全く同じなので、Dとして別に計算しても良いです。この方法をクラーメル (クラメル) (クラメール) の解法と呼びます。

目次へ戻る