部分分数分解について　　2021 年 5 月 28 日　目次へ戻る

2022.4.6　2024.3.3　訂正

1、ヘビサイドの目隠し法

分数関数の分母が 1 次因数の積に分解出来、分子の次数が分母より小さい時、

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{A}{s+b}+\frac{B}{s+c}+\frac{C}{s+d}$$

と置き、部分分数分解を行います。分子の次数が分母と同じまたは大きい時は、分子÷分母を行い、分子の次数を分母より小さくしておきます。

A を求めるには、両辺に A の分母 s＋b を掛け、

$$\frac{(s+b)(ps^2+qs+r)}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{(s+b)A}{s+b}+\frac{(s+b)B}{s+c}+\frac{(s+b)C}{s+d}$$

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+c)(s+d)}=A+\frac{(s+b)B}{s+c}+\frac{(s+b)C}{s+d}$$

－b を全ての s に代入しますと、

$$\frac{p(-b)^2+q(-b)+r}{a(-b+c)(-b+d)}=A+\frac{(-b+b)B}{-b+c}+\frac{(-b+b)C}{-b+d}$$

$$\frac{pb^2-qb+r}{a(c-b)(d-b)}=A$$

になります。右辺の第 2 項、第 3 項は分子が 0 になるため消滅し、左辺が A の値になります。B を求めるには、両辺に B の分母 s＋c を掛け、

$$\frac{(s+c)(ps^2+qs+r)}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{(s+c)A}{s+b}+\frac{(s+c)B}{s+c}+\frac{(s+c)C}{s+d}$$

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+b)(s+d)}=\frac{(s+c)A}{s+b}+B+\frac{(s+c)C}{s+d}$$

－c を全ての s に代入しますと、

$$\frac{p(-c)^2+q(-c)+r}{a(-c+b)(-c+d)}=\frac{(-c+c)A}{-c+b}+B+\frac{(-c+c)C}{-c+d}$$

$$\frac{pc^2-qc+r}{a(b-c)(d-c)}=B$$

になります。A の時と同様に左辺が B の値になります。

C を求めるには、両辺に C の分母 s＋d を掛け、

$$\frac{(s+d)(ps^2+qs+r)}{a(s+b)(s+c)(s+d)}=\frac{(s+d)A}{s+b}+\frac{(s+d)B}{s+c}+\frac{(s+d)C}{s+d}$$

$$\frac{ps^2+qs+r}{a(s+b)(s+c)}=\frac{(s+d)A}{s+b}+\frac{(s+d)B}{s+c}+C$$

－d を全ての s に代入しますと、

$$\frac{p(-d)^2+q(-d)+r}{a(-d+b)(-d+c)}=\frac{(-d+d)A}{-d+b}+\frac{(-d+d)B}{-d+c}+C$$

$$\frac{pd^2-qd+r}{a(b-d)(c-d)}=C$$

になります。部分分数分解後の分子 A、B、C の値を求めることが出来ました。この部分分数分解の方法を、ヘビサイドの目隠し法と呼びます。

2、分母に 2 重因数が在る場合の失敗例その 1（分子が 1 次式の時）

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+2)^2}$$

と置きました。ヘビサイドの目隠し法で行います。

A を求めるには、両辺に s＋1 を掛け、

$$\frac{(s+1)(s+4)}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{(s+1)A}{s+1}+\frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s+4}{(s+2)^2}=A+\frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

全ての s に－1 を代入しますと、

$$\frac{-1+4}{(-1+2)^2}=A+\frac{(-1+1)B}{(-1+2)^2}$$

$$3=A$$

になります。B を求めるには、両辺に$(s+2)^2$を掛け、

$$\frac{(s+2)^2(s+4)}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{(s+2)^2A}{s+1}+\frac{(s+2)^2B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s+4}{s+1}=\frac{(s+2)^2A}{s+1}+B$$

全ての s に－2 を代入しますと、

$$\frac{-2+4}{-2+1}=\frac{(-2+2)^2A}{-2+1}+B$$

$$-2=B$$

になります。元の式の左辺は、

$$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{-2}{(s+2)^2}$$

と部分分数分解されました。検算のため右辺を通分しますと、

$$\frac{3}{s+1}+\frac{-2}{(s+2)^2}=\frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(-2)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$= \frac{3(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2} + \frac{-2s-2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$= \frac{3s^2+12s+12-2s-2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$= \frac{3s^2+10s+10}{(s+1)(s+2)^2}$$

になり元の式の左辺、$\frac{s+4}{(s+1)(s+2)^2}$ とは全く違う分数になってしまいました。

3、分母に 2 重因数が在る場合の失敗例その 2（分子が 2 次式の時）

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

と置きました。ヘビサイドの目隠し法で行います。

A を求めるには、両辺に s＋1 を掛け、

$$\frac{(s+1)(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+1)A}{s+1} + \frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+2)^2} = A + \frac{(s+1)B}{(s+2)^2}$$

全ての s に－1 を代入しますと、

$$\frac{(-1)^2+2(-1)+4}{(-1+2)^2} = A + \frac{(-1+1)B}{(-1+2)^2}$$

$$3 = A$$

になります。B を求めるには、両辺に$(s+2)^2$ を掛け、

$$\frac{(s+2)^2(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+2)^2A}{s+1} + \frac{(s+2)^2B}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{s+1} = \frac{(s+2)^2A}{s+1} + B$$

全ての s に－2 を代入しますと、

$$\frac{(-2)^2+2(-2)+4}{-2+1} = \frac{(-2+2)^2A}{-2+1} + B$$

$$-4 = B$$

になります。元の式の左辺は、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{3}{s+1} + \frac{-4}{(s+2)^2}$$

と部分分数分解されました。検算のため右辺を通分しますと、

$$\frac{3}{s+1}+\frac{-4}{(s+2)^2}=\frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(-4)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{-4s-4}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3s^2+12s+12-4s-4}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3s^2+8s+8}{(s+1)(s+2)^2}$$

になり元の式の左辺、$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}$ とは全く違う分数になってしまいました。

4、3 と同じ問題での成功例

右辺の正しい置き方は、分母が 2 重因数の分子を、s の 1 次式 Bs＋C と置きます。分母より 1 次だけ次数を下げます。

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{(s+2)^2}$$

これはヘビサイドの目隠し法では解けませんので、通分する方法で解きます。

$$=\frac{A(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(Bs+C)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{A(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(Bs+C)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{As^2+4As+4A}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{Bs^2+Cs+Bs+C}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{(A+B)s^2+(4A+B+C)s+4A+C}{(s+1)(s+2)^2}$$

左辺の分子と比較して、

A＋B＝1・・・4－①

4A＋B＋C＝2・・・4－②

4A＋C＝4・・・4－③

です。4－①式から、

B＝1－A・・・4－④

です。4－③式から、

C＝4－4A・・・4－⑤

です。4－④式と 4－⑤式を 4－②式に代入し、

4A＋1－A＋4－4A＝2

1－A＋4＝2

1＋4－2＝A

3＝A・・・4－⑥

です。4－⑥式を 4－④式に代入し、

B＝1－3＝－2

です。4－⑥式を 4－⑤式に代入し、

C＝4－4×3＝－8

です。したがって、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{-2s-8}{(s+2)^2}\quad\cdot\cdot\cdot 4-⑦$$

と部分分数分解されました。検算のため右辺を通分しますと、

$$\frac{3}{s+1}+\frac{-2s-8}{(s+2)^2}=\frac{3(s+2)^2}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{(s+1)(-2s-8)}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3(s^2+4s+4)}{(s+1)(s+2)^2}+\frac{-2s^2-8s-2s-8}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{3s^2+12s+12-2s^2-8s-2s-8}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$=\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}$$

になり 4－⑦式の左辺と同じです。部分分数分解は成功しました。

5、分母に 2 重因数のある場合の右辺の正しい置き方

4－⑦式の右辺第 2 項に次の様な加工を行い、項を 2 つに分けますと、

$$\frac{-2s-8}{(s+2)^2}=\frac{-2s-4-4}{(s+2)^2}$$

$$=\frac{-2(s+2)-4}{(s+2)^2}$$

$$=\frac{-2(s+2)}{(s+2)^2}+\frac{-4}{(s+1)^2}$$

$$=\frac{-2}{s+2}+\frac{-4}{(s+2)^2}$$

になり分子は全て 0 次の定数になります。この結果を使いますと初めに置いた式、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{(s+2)^2}$$

の右辺第 2 項を、

$$=\frac{A}{s+1}+\frac{B(s+2)+C-2B}{(s+2)^2}$$

の様に 2 つに分け、

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B(s+2)}{(s+2)^2} + \frac{C-2B}{(s+2)^2}$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C-2B}{(s+2)^2}$$

と置くことが出来ます。B も C も未知数なので、C－2B を改めて C と置けば、

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \quad ・・・5－①$$

になります。これが分母に 2 重因数が在る場合、部分分数分解後の分子を全て 0 次の定数にする正しい置き方になります。3 重因数以上でも同じ考え方です。べきが 1 になるまで因数を並べます。

6、5－①式の解き方

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

をヘビサイドの目隠し法で行います。

A を求めるには、両辺に s＋1 を掛け、

$$\frac{(s+1)(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+1)A}{s+1} + \frac{(s+1)B}{s+2} + \frac{(s+1)C}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+2)^2} = A + \frac{(s+1)B}{s+2} + \frac{(s+1)C}{(s+2)^2}$$

全ての s に－1 を代入しますと、

$$\frac{(-1)^2+2(-1)+4}{(-1+2)^2} = A + \frac{(-1+1)B}{-1+2} + \frac{(+1+1)C}{(-1+2)^2}$$

$$3 = A$$

になります。先に C を求めます。C を求めるには、両辺に$(s+2)^2$を掛け、

$$\frac{(s+2)^2(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{(s+2)^2A}{s+1} + \frac{(s+2)^2B}{s+2} + \frac{(s+2)^2C}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{s+1} = \frac{(s+2)^2A}{s+1} + (s+2)B + C \quad ・・・6－①$$

全ての s に－2 を代入しますと、

$$\frac{(-2)^2+2(-2)+4}{-2+1} = \frac{(-2+2)^2A}{-2+1} + (-2+2)B + C$$

$$-4 = C$$

になります。B を求めようとして、両辺に s＋2 を掛けますと、

$$\frac{(s+2)(s^2+2s+4)}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{(s+2)A}{s+1}+\frac{(s+2)B}{s+2}+\frac{(s+2)C}{(s+2)^2}$$

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)}=\frac{(s+2)A}{s+1}+B+\frac{C}{s+2}$$

になります。全ての s に－2 を代入しますと、

$$\frac{(-2)^2+2(-2)+4}{(-2+1)(-2+2)}=B+\frac{C}{-2+2}$$

になります。左辺と右辺 C の分母が 0 になり無効です。B の求め方にテクニックが必要です。B を求めるには 6－①式の両辺を s について微分し、

$$\frac{d}{ds}\cdot\frac{s^2+2s+4}{s+1}=\frac{d}{ds}\cdot\frac{(s+2)^2A}{s+1}+\frac{d}{ds}\cdot(s+2)B+\frac{d}{ds}\cdot C \quad ・・・6－②$$

$$\frac{(2s+2)(s+1)-(s^2+2s+4)}{(s+1)^2}=\frac{2A(s+2)-(s+2)^2A}{(s+1)^2}+B$$

全ての s に－2 を代入しますと、

$$\frac{\{2(-2)+2\}(-2+1)-\{(-2)^2+2(-2)+4\}}{(-2+1)^2}=\frac{2A(-2+2)-(-2+2)^2A}{(s+1)^2}+B$$

$$-2=B$$

になり上手く行きます。5－①式は、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{-2}{s+2}+\frac{-4}{(s+2)^2}$$

と部分分数分解されました。6－②式の微分についての説明は 9、にあります。

7、5－①式の別の解き方

普通はこの様に微分をして解きますが、B について次のような解き方も有力です。

5－①式に、計算で求めた A と C の値を入れますと、

$$\frac{s^2+2s+4}{(s+1)(s+2)^2}=\frac{3}{s+1}+\frac{B}{s+2}+\frac{-4}{(s+2)^2}$$

です。部分分数分解は恒等式ですから、分母を 0 にする値でなければ s の値は自由です。s に 0 を代入してみますと、

$$\frac{0^2+2\bullet 0+4}{(0+1)(0+2)^2}=\frac{3}{0+1}+\frac{B}{0+2}+\frac{-4}{(0+2)^2}$$

$$\frac{4}{4}=\frac{3}{1}+\frac{B}{2}+\frac{-4}{4}$$

$$1=3+\frac{B}{2}-1$$

という方程式になりました。これを解けば、

$$B = -2$$

となります。上の例では微分する方法より簡単ですが、場合によります。

8、分母に多重因数がある場合の部分分数分解まとめ

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+s_0)^n \cdot D(s)}$$

$$= \frac{A_1}{(s+s_0)^n} + \frac{A_2}{(s+s_0)^{n-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_k}{s+s_0} + \cdots\cdots + \cdots\cdots$$

k＝1,2,3,・・・・n

N(s)は分子多項式、D(s)は分母の他の因数です。n は因数の累乗数です。$(s+s_0)^n$ を分母とする部分分数の分子、A_1、A_2、・・・・・、A_k を求める公式は、

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\{(s+s_0)^n \cdot F(s)\}\right]_{s=-s_0} \quad \cdots 8-①$$

です。例えば、

$$A_1 = [(s+s_0)^n \cdot F(s)]_{s=-s_0}$$

A_1 は $F(s)$ に $(s+s_0)^n$ を掛けて s→s_0 を行います。

$$A_2 = \left[\frac{d}{ds}\{(s+s_0)^n \cdot F(s)\}\right]_{s=-s_0}$$

A_2 は $F(s)$ に $(s+s_0)^n$ を掛け、1 回微分して s→s_0 を行います。

$$A_3 = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{d^2}{ds^2}\{(s+s_0)^n \cdot F(s)\}\right]_{s=-s_0}$$

A_3 は $F(s)$ に $(s+s_0)^n$ を掛け、2 回微分して s→s_0 を行い、$\frac{1}{2}$ を掛けます。

$$A_k = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\{(s+s_0)^n \cdot F(s)\}\right]_{s=-s_0}$$

A_k は $F(s)$ に $(s+s_0)^n$ を掛け、(k－1)回微分して s→s_0 を行い、$\frac{1}{(k-1)!}$ を掛けます。

$\dfrac{1}{(k-1)!}$ は微分をくり返すと A_k の前に付いて来る、いらない定数を除去する為のものです。下の例をご覧下さい。

3 重因数のある分数の部分分数分解です。

$$\frac{s^2+3s-2}{(s-1)^3}=\frac{A_1}{(s-1)^3}+\frac{A_2}{(s-1)^2}+\frac{A_3}{s-1}$$

と置きます。両辺に $(s-1)^3$ を掛けますと、

$$\frac{(s-1)^3(s^2+3s-2)}{(s-1)^3}=\frac{(s-1)^3A_1}{(s-1)^3}+\frac{(s-1)^3A_2}{(s-1)^2}+\frac{(s-1)^3A_3}{s-1}$$

$$s^2+3s-2=A_1+(s-1)A_2+(s-1)^2A_3 \quad ・・・8ー①$$

になります。8ー①式の全ての s に 1 を代入しますと、

$$1^2+3-2=A_1$$
$$2=A_1$$

になり A_1 が決定します。A_2 を求める為、8ー①式の両辺を s で微分しますと、

$$2s+3=A_2+2(s-1)A_3 \quad ・・・8ー②$$

になります。8ー②式の全ての s に 1 を代入しますと、

$$2+3=A_2$$
$$5=A_2$$

になり A_2 が決定します。A_3 を求める為、8ー②式の両辺を s で微分しますと、

$$2=2A_3$$

になります。ここで右辺 A_3 の前に 2 と言う定数が付いて来ます。計算を続けますと、

$$\frac{2}{2}=A_3$$
$$1=A_3$$

になり A_3 が決定します。元の式は、

$$\frac{s^2+3s-2}{(s-1)^3}=\frac{2}{(s-1)^3}+\frac{5}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1}$$

と部分分数分解されました。

微分をくり返しますと A_3 以降、右辺 A_k の前にいらない定数が付いて来ます。両辺の微分を行えば間違えませんが、両辺の微分を行わず、8－①式に当てはめ、F(s)だけで計算する時、いらない定数を除去するのが $\dfrac{1}{(k-1)!}$ の目的です。（注：0!＝1、1!＝1）両辺を微分して行く場合は、この $\dfrac{1}{(k-1)!}$ を考える必要はありません。

9、6－②式の分数関数の微分について

(1)分数の微分公式は、

$$\frac{f(s)}{g(s)} = \frac{f'(s)\cdot g(s) - f(s)\cdot g'(s)}{\{g(s)\}^2}$$

です。

(2) $(s+2)^2$ の微分

$$y = (u)^2$$
$$u = s + 2$$

と置きますと合成関数の微分公式により、

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{ds} = 2u\cdot 1 = 2u$$
$$= 2u\cdot 1$$
$$= 2u$$

になります。u を元に戻し、

$$= 2(s+2)$$

です。

(3)c を定数とした場合、

$$\{c\,f(x)\}' = c\,f'(x)$$

という公式により、⑩式右辺第 1 項では A が残ります。

目次へ戻る