低域通過バイカッド回路　　２０１２年８月１５日　　目次へ戻る

1、伝達関数

「バイカッド回路について」の章で検討しましたが、バイカッド回路のブロック図は、図１の通りです。

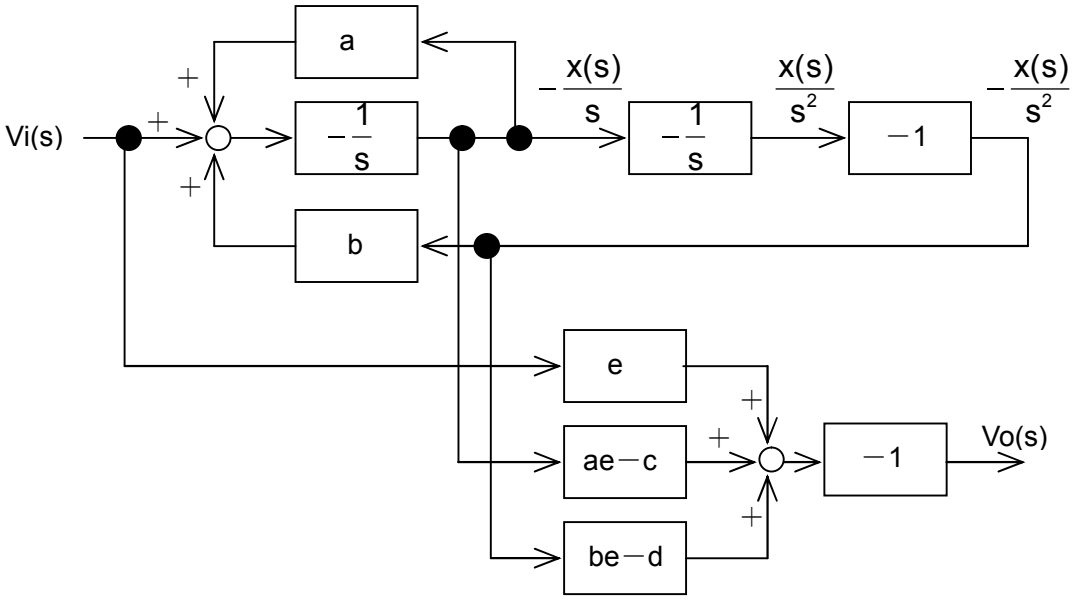


図１

図１は $\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = -\frac{es^2+cs+d}{s^2+as+b}$ という伝達関数を作る時に必要な回路です。低域通過の伝達関数は、e=0、c=0 であり、「バイカッド回路について」の章、⑩式は、

$$Vo(s) = -\left\{eVi(s) - (ae-c)\frac{x(s)}{s} - (be-d)\frac{x(s)}{s^2}\right\}$$

$$= -\{-(-d)\}\frac{x(s)}{s^2}$$

$$= -(d)\frac{x(s)}{s^2}$$

$$= -d\frac{x(s)}{s^2}$$

となります。出力用加算器は使う必要が無く、図１の上段右端の信号 $-\frac{x(s)}{s^2}$ に係数 d がついていれば良いことが分ります。

2、実際の回路

ひとまず係数 d は置いておき、実際の回路で図 1 の上段右端信号までの伝達関数を調べます。

図 2 は実際回路です。この回路の動作を検証します。

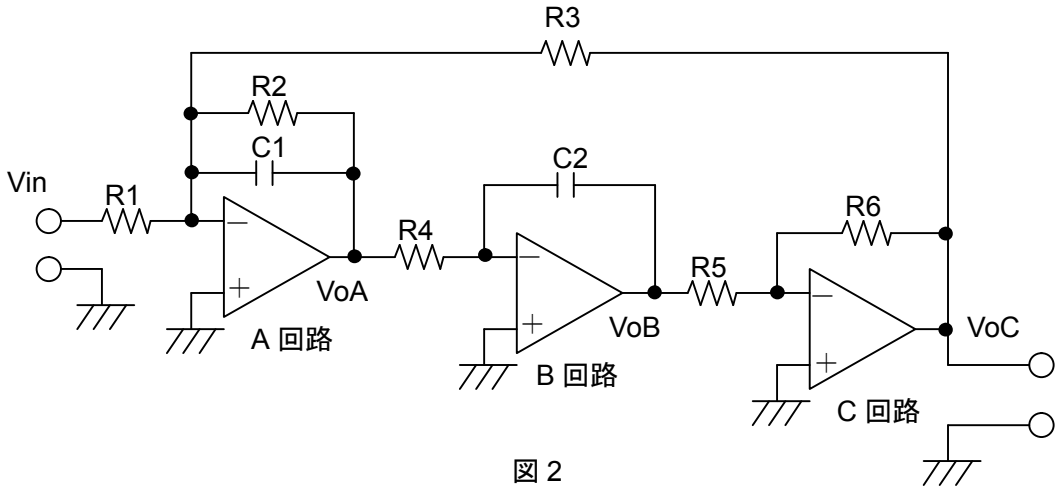
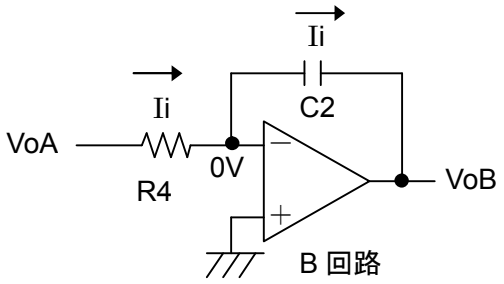


図 2

(1)B 回路

真ん中の B 回路からです。



この B 回路は積分回路です。イマジナルショートが成り立ち、オペアンプの＋入力と－入力間に電位差は生じません。この回路では＋入力が接地されて 0V ですので－入力も常に 0V になる筈です。

また初期状態では、VoA は 0V、Ii も 0A、電荷がたまっていない為 C2 の両端電圧は 0V です。したがって、オペアンプの出力電圧 VoB も 0V です。

VoA が入力されますと、オームの法則により、R4 には $Ii = \frac{VoA}{R4}$ という電流が流れます。

オペアンプの入力に電流の出入りはありませんので、この電流は全て C2 に流れます。

すると C2 には電流を時間で積分した、$Q = \int_0^t \frac{VoA}{R4} dt$ の電荷がたまります。

電荷がたまりますと、C2 両端に電流が流れ込む側を＋として $V=\frac{Q}{C2}$ の電圧が発生します。オペアンプ出力 VoB が 0V のままでは、イマジナルショートが成り立たなくなります。VoB に C2 の電圧を打ち消す負の電圧が出て、オペアンプの－入力を 0V にします。

したがって出力電圧にはマイナスが付き、

$$VoB=\frac{-\int_0^t \frac{VoA}{R4}dt}{C2}=\frac{-\frac{1}{R4}\int_0^t VoAdt}{C2}=-\frac{1}{C2R4}\int_0^t VoAdt$$

となります。ラプラス変換して、$VoB(s)=-\frac{1}{sC2R4}VoA(s)$ になります。

B 回路の伝達関数は、$\frac{VoB(s)}{VoA(s)}=-\frac{1}{sC2R4}$ です。

B 回路の正弦波応答を求めます。Y(s)を出力のラプラス変換、G(s)を回路の伝達関数、L[ ]をラプラス変換する記号としますと、正弦波入力時の出力のラプラス変換は V_m を正弦波の最大値として、

$$Y(s)=G(s)\ L\left[V_m\sin\omega t\right]=G(s)V_m\frac{\omega}{s^2+\omega^2}=G(s)\frac{V_m\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

となるのでした。伝達関数 G(s)が $-\frac{1}{sCR}=\frac{-\frac{1}{CR}}{s}$ の場合の正弦波応答は、

$$Y(s)=\frac{-\frac{1}{CR}V_m\omega}{s(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

となります。ラプラス逆変換をする為、部分分数変換を行います。部分分数展開の詳しいやり方は「s＝jω とは何か」の章をご参照下さい。

$$\frac{-\frac{1}{CR}V_m\omega}{s(s+j\omega)(s-j\omega)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{C}{s-j\omega}$$

と置きます。

展開係数 A は両辺に s をかけ、s＝0 と置き、

$$A=s\bullet\left.\frac{-\frac{1}{CR}V_m\omega}{s(s+j\omega)(s-j\omega)}\right|_{s=0}=\frac{-\frac{1}{CR}V_m\omega}{\omega^2}=\frac{-\frac{1}{CR}V_m}{\omega}=\frac{-V_m}{\omega CR}$$

となります。

展開係数 B は両辺に s+jω をかけ、s＝－jω と置き、

$$B = (s + j\omega) \bullet \left. \frac{-\frac{1}{CR} V_m \omega}{s(s + j\omega)(s - j\omega)} \right|_{s=-j\omega} = \frac{-\frac{1}{CR} V_m \omega}{-j\omega \bullet -2j\omega} = \frac{-\frac{1}{CR} V_m \omega}{-2\omega^2} = \frac{\frac{1}{CR} V_m}{2\omega} = \frac{\frac{V_m}{\omega CR}}{2}$$

となります。

展開係数 C は両辺に s－jω をかけ、s＝jω と置き、

$$C = (s - j\omega) \bullet \left. \frac{-\frac{1}{CR} V_m \omega}{s(s + j\omega)(s - j\omega)} \right|_{s=j\omega} = \frac{-\frac{1}{CR} V_m \omega}{j\omega \bullet 2j\omega} = \frac{-\frac{1}{CR} V_m \omega}{-2\omega^2} = \frac{\frac{1}{CR} V_m}{2\omega} = \frac{\frac{V_m}{\omega CR}}{2}$$

となります。

したがって正弦波応答のラプラス変換は、

$$\frac{-\frac{1}{CR} V_m \omega}{s(s + j\omega)(s - j\omega)} = \frac{\frac{-V_m}{\omega CR}}{s} + \frac{\frac{\frac{V_m}{\omega CR}}{2}}{s + j\omega} + \frac{\frac{\frac{V_m}{\omega CR}}{2}}{s - j\omega}$$

と部分分数に分解されます。ラプラス逆変換の公式、$L^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] = A$、$L^{-1}\left[\frac{A}{s-\alpha}\right] = Ae^{\alpha t}$ から、B 回路の時間関数は、

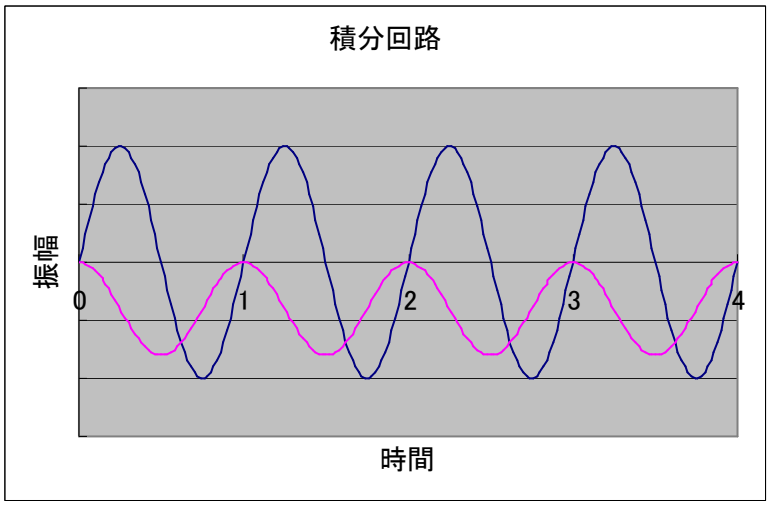
$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{-V_m}{\omega CR} + \frac{\frac{V_m}{\omega CR}}{2} e^{-j\omega t} + \frac{\frac{V_m}{\omega CR}}{2} e^{j\omega t}$$

$$= \frac{-V_m}{\omega CR} + \frac{V_m}{\omega CR}\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)$$

$$= \frac{-V_m}{\omega CR} + \frac{V_m}{\omega CR}\left(\frac{\cos\omega t + j\sin\omega t + \cos\omega t - j\sin\omega t}{2}\right)$$

$$= \frac{-V_m}{\omega CR} + \frac{V_m}{\omega CR}\cos\omega t$$

となります。$\frac{-V_m}{\omega CR}$という負のオフセットが付き、大きさは$\frac{1}{\omega CR}$となり、正弦波が余弦波となります。下にグラフを示します。入力が青、出力がピンクです。ピンクには負の直流分があり、分りにくいですが、青の１波中にピンクの１波が入っています。ピンクは cos 波になっています。



正弦波応答を、初期条件無しのラプラス変換で計算すると、t=0 で VoB=0 (V)になる様に積分定数$\frac{-V_m}{\omega CR}$が付きます。何故ならば、t=0 で cosωt の値は 1 です。したがって$\frac{V_m}{\omega CR}$(V)が出力されそうになります。これでは t=0 で VoB=0 (V)になりませんから、この電圧を打ち消す積分定数として$\frac{-V_m}{\omega CR}$が付きます。供給電圧とは無関係の、負の直流電圧が出力されることを表しています。

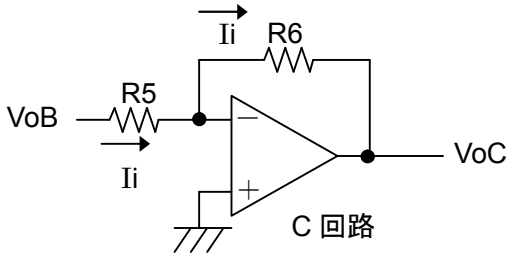
しかし、図 2 を見て頂ければ分ります様に、このような直流電圧は、C 回路、A 回路を通って負のまま VoA に戻って来ます。戻って来た負の直流電圧は、今度は VoB 出力に正の電圧を生じさせます。この繰り返しにより、直流電圧は無くなってしまいます。従って、B 回路の正弦波応答出力は、

$$y(t) = \frac{V_m}{\omega CR}\cos\omega t$$

になります。

(2)C 回路

次は図 2 右側の C 回路です。



これは反転増幅器です。イマジナルショートが成り立ち、オペアンプの＋入力と－入力間に電位差は生じません。この回路では＋入力が接地されて 0V ですので－入力も常に 0V になる筈です。

さて VoB が入力されますと、オームの法則により、R5 には $Ii = \frac{VoB}{R5}$ という電流が流れます。

オペアンプの入力に電流の出入りはありませんので、この電流は全て R6 に流れます。

すると R6 には、電流が流れ込む側を＋として V＝IiR6 の電圧が発生します。もしオペアンプ出力 VoC が 0V のままでは、イマジナルショートが成り立たなくなります。VoC に R6 の電圧を打ち消す負の電圧が出て、オペアンプの－入力を 0V にします。したがって出力電圧はマイナスが付き、

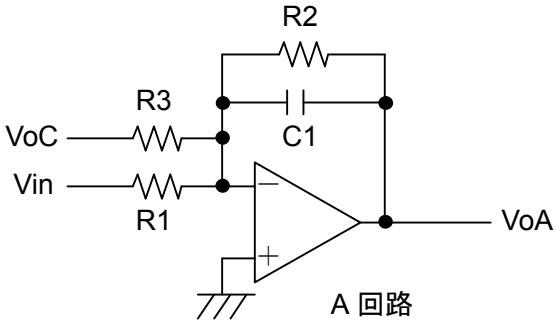
$$VoC = -\frac{VoB}{R5} \bullet R6$$

となります。ラプラス変換して $VoC(s) = -\frac{R6}{R5} VoB(s)$ になります。

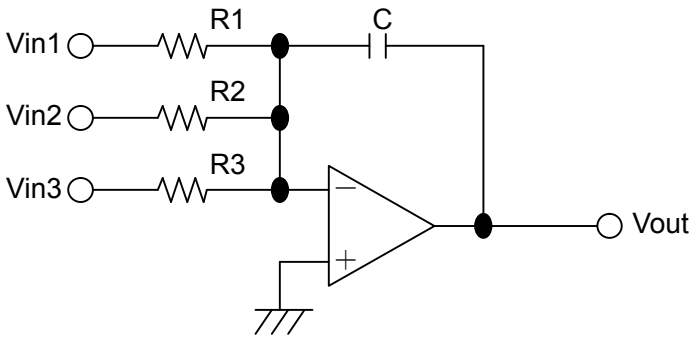
C 回路の伝達関数は、$\frac{VoC(s)}{VoB(s)} = -\frac{R6}{R5}$ です。

(3)A 回路

最後は図 2 左側の A 回路です。



この回路の動作を考える前に、次の回路の動作を考えます。



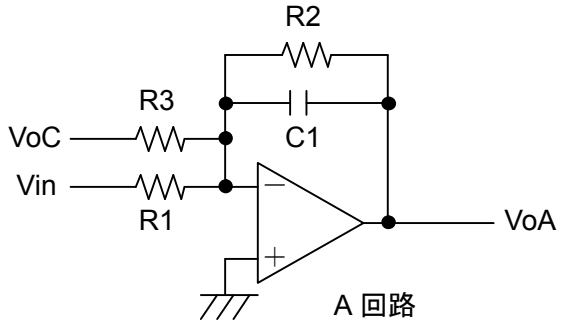
R1 には Vin1 による電流、R2 には Vin2 による電流、R3 には Vin3 による電流が流れます。イマジナルショートにより、オペアンプの－入力は 0V です。R1、R2、R3 のオペアンプ側は常に GND 電位です。各電流値は他の電圧値に全く影響を受けません。例えば Vin2、Vin3 が何 V であろうと、R1 には常に $\frac{Vin1}{R1}$ の電流が流れます。その後の動作は、本章初めの回路と同じです。和の電流が C で積分され Q の電荷を生じ、$\frac{Q}{C}$ の電圧を生みます。その電圧をキャンセルさせるマイナスの電圧が出力 Vout に出ますから、

$$
\begin{aligned}
Vout &= -\frac{\int_0^t \left(\frac{Vin1}{R1} + \frac{Vin2}{R2} + \frac{Vin3}{R3} \right) dt}{C} \\
&= -\frac{\int_0^t \frac{Vin1}{R1} dt + \int_0^t \frac{Vin2}{R2} dt + \int_0^t \frac{Vin3}{R3} dt}{C} \\
&= -\frac{\frac{1}{R1}\int_0^t Vin1 \ dt + \frac{1}{R2}\int_0^t Vin2 \ dt + \frac{1}{R3}\int_0^t Vin3 \ dt}{C} \\
&= -\left(\frac{1}{CR1}\int_0^t Vin1 \ dt + \frac{1}{CR2}\int_0^t Vin2 \ dt + \frac{1}{CR3}\int_0^t Vin3 \ dt \right)
\end{aligned}
$$

となります。この式をラプラス変換しますと、

$$
\begin{aligned}
Vout\ (s) &= -\left\{ \frac{1}{sCR\,1} Vin1\,(s) + \frac{1}{sCR\,2} Vin2\ (s) + \frac{1}{sCR\,3} Vin3\ (s) \right\} \\
&= -\frac{1}{s}\left\{ \frac{1}{CR\,1} Vin1\,(s) + \frac{1}{CR\,2} Vin2\ (s) + \frac{1}{CR\,3} Vin3\ (s) \right\}
\end{aligned}
$$

になります。各係数の付いた各電圧を加算し、積分し、符号を反転した出力が出ることが分ります。この回路の出力 Vout を、Vin1～3 の何れかにつなげたのが A 回路です。



したがって、次の式が成り立ちます。

$$\mathrm{VoA}(s) = -\frac{1}{s}\left\{\frac{1}{C1R1}\mathrm{Vin}(s) + \frac{1}{C1R3}\mathrm{VoC}(s) + \frac{1}{C1R2}\mathrm{VoA}(s)\right\}$$

$$= -\frac{1}{sC1R1}\mathrm{Vin}(s) - \frac{1}{sC1R3}\mathrm{VoC}(s) - \frac{1}{sC1R2}\mathrm{VoA}(s)$$

$$\mathrm{VoA}(s) + \frac{1}{sC1R2}\mathrm{VoA}(s) = -\frac{1}{sC1R1}\mathrm{Vin}(s) - \frac{1}{sC1R3}\mathrm{VoC}(s)$$

$$\mathrm{VoA}(s)\left(1 + \frac{1}{sC1R2}\right) = -\frac{1}{sC1R1}\mathrm{Vin}(s) - \frac{1}{sC1R3}\mathrm{VoC}(s)$$

$$\mathrm{VoA}(s)\frac{1 + sC1R2}{sC1R2} = -\frac{1}{sC1R1}\mathrm{Vin}(s) - \frac{1}{sC1R3}\mathrm{VoC}(s)$$

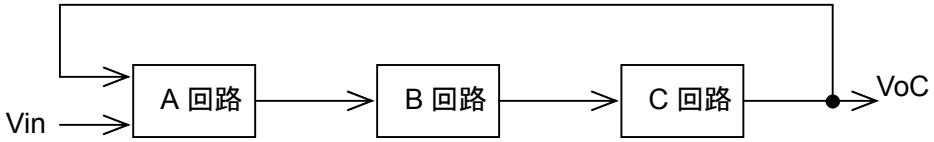
$$\mathrm{VoA}(s) = \frac{sC1R2}{1 + sC1R2}\left\{-\frac{1}{sC1R1}\mathrm{Vin}(s) - \frac{1}{sC1R3}\mathrm{VoC}(s)\right\}$$

$$= -\frac{R2}{R1} \bullet \frac{1}{1 + sC1R2}\mathrm{Vin}(s) - \frac{R2}{R3} \bullet \frac{1}{1 + sC1R2}\mathrm{VoC}(s)$$

です。

3、実際回路の伝達関数

いよいよ、図 2 回路の伝達関数を求めます。下図が図 2 回路のブロック図です。



ブロック図の通りに計算して行きます。

$$\mathrm{VoC}(s)=\left\{-\frac{R2}{R1}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{Vin}(s)-\frac{R2}{R3}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{VoC}(s)\right\}\bullet\frac{-1}{sC2R4}\bullet\frac{-R6}{R5}$$

上式{　}内が A 回路の伝達関数、そのあとが B 回路と C 回路の伝達関数です。計算を続けます。

$$\mathrm{VoC}(s)=-\frac{R2}{R1}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{Vin}(s)$$

$$-\frac{R2}{R3}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{VoC}(s)$$

$$\mathrm{VoC}(s)+\frac{R2}{R3}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{VoC}(s)$$

$$=-\frac{R2}{R1}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{Vin}(s)$$

$$\mathrm{VoC}(s)\left(1+\frac{R2}{R3}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\right)$$

$$=-\frac{R2}{R1}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{Vin}(s)$$

$$\mathrm{VoC}(s)=\frac{-\frac{R2}{R1}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}\mathrm{Vin}(s)}{1+\frac{R2}{R3}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}}$$

となります。分母の計算をしますと、

$$1+\frac{R2}{R3}\bullet\frac{1}{sC2R4}\bullet\frac{R6}{R5}\bullet\frac{1}{1+sC1R2}=1+\frac{R2R6}{sC2R3R4R5(1+sC1R2)}$$

$$= \frac{sC2R3R4R5(1+sC1R2)+R2R6}{sC2R3R4R5(1+sC1R2)}$$

となります。分子の計算をしますと、

$$-\frac{R2}{R1} \bullet \frac{1}{sC2R4} \bullet \frac{R6}{R5} \bullet \frac{1}{1+sC1R2} Vin(s) = \frac{-Vin(s)R2R6}{sC2R1R4R5(1+sC1R2)}$$

となります。したがって、

$$VoC(s) = \frac{-Vin(s)R2R6}{sC2R1R4R5(1+sC1R2)} \bullet \frac{sC2R3R4R5(1+sC1R2)}{sC2R3R4R5(1+sC1R2)+R2R6}$$

$$= \frac{-Vin(s)R2R6}{R1} \bullet \frac{R3}{sC2R3R4R5(1+sC1R2)+R2R6}$$

$$= \frac{-Vin(s)R2R3R6}{sC2R1R3R4R5(1+sC1R2)+R1R2R6}$$

$$= \frac{-Vin(s)R2R3R6}{s^2C1C2R1R2R3R4R5 + sC2R1R3R4R5 + R1R2R6}$$

となります。分子分母に $\frac{1}{C1C2R1R2R3R4R5}$ をかけますと、

$$= \frac{\frac{-Vin(s)R2R3R6}{C1C2R1R2R3R4R5}}{\frac{s^2C1C2R1R2R3R4R5}{C1C2R1R2R3R4R5} + \frac{sC2R1R3R4R5}{C1C2R1R2R3R4R5} + \frac{R1R2R6}{C1C2R1R2R3R4R5}}$$

$$= \frac{-Vin(s)\frac{R6}{C1C2R1R4R5}}{s^2 + \frac{1}{C1R2}s + \frac{R6}{C1C2R3R4R5}}$$

となります。両辺に $\frac{1}{Vin(s)}$ をかけ、$\frac{VoC(s)}{Vin(s)}$ を求めますと、

$$\frac{VoC(s)}{Vin(s)} = \frac{-\dfrac{R6}{C1C2R1R4R5}}{s^2 + \dfrac{1}{C1R2}s + \dfrac{R6}{C1C2R3R4R5}}$$

$$= -\frac{R6}{R5} \bullet \frac{\dfrac{1}{C1C2R1R4}}{s^2 + \dfrac{1}{C1R2}s + \dfrac{R6}{C1C2R3R4R5}} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

となります。これが図 2 回路の伝達関数です。伝達関数の式にこれだけのパラメーターがあるので、係数 d を気にせずに現実の伝達関数に十分対応できることを、具体的な素子値決定方法として次に示します。

4、素子値の決定

回路の各素子値決定方法について検討します。

2 次の低域通過伝達関数は、

$$\frac{H\omega_0{}^2}{s^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}s + \omega_0{}^2} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

でした。分子の $\omega_0{}^2$ は、角周波数 0 での利得を H＝1 の時に 1 にする為に必要です。

①式の R3＝R4＝R、C1＝C2＝C、R5＝R6 とします。すると②式分母側の $\omega_0{}^2$ は、

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{C^2R^2}$$

となります。したがって、

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}$$

です。

C1＝C2＝C を先に決めた場合、R3＝R4＝R は、

$$R = \frac{1}{\omega_0 C}$$

となります。

②式の $\dfrac{\omega_0}{Q}$ は、①式の $\dfrac{1}{C1R2}$ です。C1＝C2＝C と決めました。したがって、

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{CR2}$$

$$Q = \omega_0 CR2$$

$$R2 = \frac{Q}{\omega_0 C} = QR$$

となります。

②式の H は、全体の利得を決定します。先程、R5＝R6 と決めましたので、①式の $\frac{R6}{R5}$ では利得を変えることは出来ません。C1、C2、R4 も既に決定されています。

①式の分子 $\frac{1}{C1C2R1R4}$ を次の様に変形します。

$$\frac{1}{C1C2R1R4} = \frac{R3}{R1} \bullet \frac{1}{C1C2R3R4} = H\omega_0{}^2$$

したがって、

$$H = \frac{R3}{R1}$$

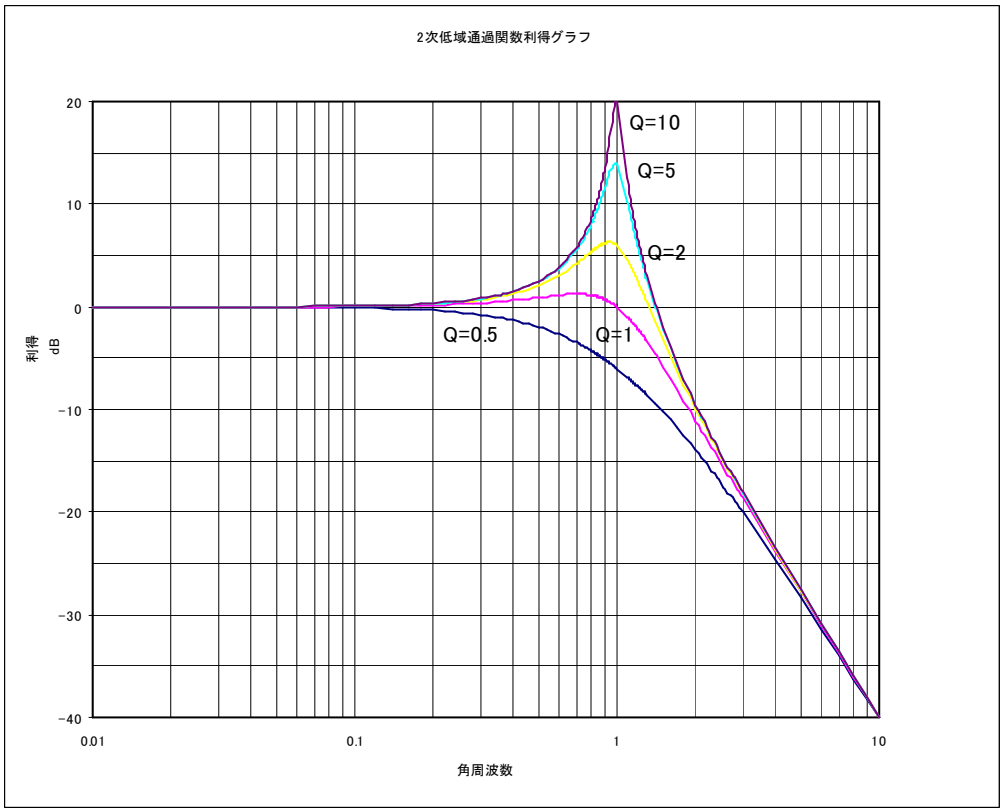
$$HR1 = R3$$

$$R1 = \frac{R3}{H}$$

となります。

5、利得グラフ

②式の ω_0 と H が、共に 1 の場合の利得グラフを下に示します。s＝jω と置き、各 ω での絶対値を求め、利得をデシベル計算したものです



伝達関数は正規化角周波数で設計するのでした。その伝達関数を使い、回路の各素子値を設計します。その後、周波数スケーリングで実周波数に持って来ます。最後に素子値スケーリングを行い、素子値を実用的な範囲にまとめます。

「スケーリング」の章、「周波数変換」の章もご覧下さい。

目次へ戻る