3 次ベッセル LC フィルターの設計　その２　　２０２０年１１月２３日　目次へ戻る

2021.1.11　2024.1.26　訂正

3 次ベッセル LC フィルターについて、解き方のご質問を頂きました。不勉強の為その解き方を知りませんでした。勉強させて頂きました。

1、リアクタンス回路が T 型の場合

図 1 の回路の伝達関数 $\frac{V_O}{V_I}$ を求めます。出力端子 V_O につながる負荷のインピーダンスは 1Ω に対して十分高いものとします。

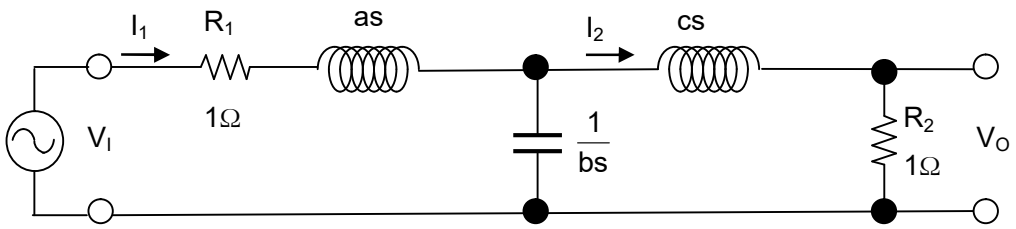

図 1

まず I_2 を求めます。I_1 を $\frac{1}{bs}$ と直列回路 $cs+1$ で分流し、I_2 は $cs+1$ 側の電流ですので、

$$I_2 = I_1 \times \frac{\frac{1}{bs}}{\frac{1}{bs} + cs + 1}$$

となります。（分流回路について理解不能の場合は、本章の 5 を参照下さい。）分子分母に bs をかけ、

$$= I_1 \times \frac{1}{bcs^2 + bs + 1}$$

です。出力電圧 V_O は、この電流に R_2 の抵抗値をかけ、

$$V_O = I_1 \times \frac{1}{bcs^2 + bs + 1} \times 1$$

$$= I_1 \times \frac{1}{bcs^2 + bs + 1} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

です。入力の電流 I_1 は、電圧 V_I を全体のインピーダンスで割ったものです。はしご型回路の場合、全体のインピーダンスは出力側から考えると楽です。

cs と 1Ω の直列のインピーダンスは cs＋1 です。このインピーダンスが、$\frac{1}{bs}$ と並列になっていますから、$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{bs}}+\frac{1}{cs+1}}$ です。（並列回路の合成インピーダンスについて理解不能の場合は、本章の 4 をご覧下さい。）そこに 1Ω と as の直列である 1＋as がつながっていますので、全体のインピーダンス Z は、

$$Z = 1 + as + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{bs}}+\frac{1}{cs+1}}$$

です。計算を進めますと、

$$= 1 + as + \frac{1}{bs + \frac{1}{cs+1}}$$

$$= 1 + as + \frac{1}{\frac{bs(cs+1)+1}{cs+1}}$$

$$= 1 + as + \frac{cs+1}{bcs^2+bs+1}$$

$$= \frac{bcs^2+bs+1+as(bcs^2+bs+1)+cs+1}{bcs^2+bs+1}$$

$$= \frac{abcs^3+abs^2+bcs^2+as+bs+cs+2}{bcs^2+bs+1}$$

$$= \frac{abcs^3+b(a+c)s^2+(a+b+c)s+2}{bcs^2+bs+1}$$

です。V_1 を Z で割ったものが I_1 ですから、

$$I_1 = V_1 \div Z$$

$$= V_1 \times \frac{bcs^2+bs+1}{abcs^3+b(a+c)s^2+(a+b+c)s+2}$$

です。この I_1 を V_O の①式に代入しますと、

$$V_o = V_I \times \frac{bcs^2 + bs + 1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2} \times \frac{1}{bcs^2 + bs + 1}$$

$$= V_I \times \frac{1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2}$$

です。両辺を V_I で割りますと、

$$\frac{V_o}{V_I} = \frac{V_I}{V_I} \times \frac{1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2}$$

$$= \frac{1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

になりました。これが図 1 の回路の伝達関数です。R_1－R_2 型で $\frac{R_1}{R_2} = 1$ の 3 次ローパスフィルター回路の伝達関数になります。

「3 次ベッセル LC フィルターの設計」の章で計算致しましたが、角周波数 0[rad/sec]（直流）での利得が 0[dB]（筒抜け）、1[rad/sec]での利得が－3.01[dB]になるベッセルフィルターの伝達関数は、

$$\frac{15}{(1.755592257s)^3 + 6(1.755592257s)^2 + 15(1.755592257s) + 15}$$

$$= \frac{15}{5.410918221s^3 + 18.49262504s^2 + 26.33388386s + 15}$$

でした。図 1 の様な R_1－R_2 回路の $\frac{R_1}{R_2} = 1$ では、角周波数 0（＝直流）において、単なる抵抗分圧回路となり、$\frac{V_O}{V_I} = \frac{1}{2}$ の減衰が起きます。角周波数が増加しても、この $\frac{1}{2}$ の減衰は常にあります。R_1、R_2 を含めた伝達関数は、この値をかけ、

$$\frac{1}{2}\bullet\frac{15}{5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15}$$

$$=\frac{15}{2\bullet(5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15)}$$

になります。分子分母に$\frac{1}{15}$をかけますと、

$$=\frac{15\bullet\frac{1}{15}}{2\bullet(5.410918221s^3+18.49262504s^2+26.33388386s+15)\bullet\frac{1}{15}}$$

$$=\frac{1}{0.721455762s^3+2.465683339s^2+3.511184515s+2}$$

になります。回路の伝達関数である②式において、

$$abc=0.721455762 \quad ・・・③$$
$$b(a+c)=2.465683339 \quad ・・・④$$
$$a+b+c=3.511184515 \quad ・・・⑤$$

になれば、R_1－R_2型で$\frac{R_1}{R_2}=1$の 3 次ベッセルフィルター回路が実現出来ます。

④式から、

$$a+c=\frac{2.465683339}{b}$$

です。⑤式に代入し、

$$b+\frac{2.465683339}{b}=3.511184515$$

です。両辺に b をかけますと、

$$b^2+2.465683339=3.511184515b$$

になります。右辺を移項して、

$$b^2-3.511184515b+2.465683339=0$$

と言う方程式が出来ました。因数分解しますと、

$$(b-2.540716984)(b-0.970467531)=0$$

になり、

$$b=2.540716984 \text{ または} b=0.970467531$$

となりました。

$b = 2.540716984$ の時、③式に代入しますと、

$$2.540716984ac = 0.721455762$$

$$ac = \frac{0.721455762}{2.540716984} = 0.283957546$$

$$c = \frac{0.283957546}{a} \quad ・・・⑥$$

になります。同じく $b = 2.540716984$ を⑤式に代入しますと、

$$a + 2.540716984 + c = 3.511184515$$

$$a + c = 3.511184515 - 2.540716984 = 0.970467531$$

$$a = 0.970467531 - c \quad ・・・⑦$$

になります。⑥式を⑦式に代入しますと、

$$a = 0.970467531 - \frac{0.283957546}{a}$$

になります。両辺に a をかけますと、

$$a^2 = 0.970467531a - 0.283957546$$

になり、右辺を移項して、

$$a^2 - 0.970467531a + 0.283957546 = 0$$

と言う方程式が出来ました。因数分解しますと、

$$(a - 0.485233766 + j0.220240184)(a - 0.485233766 - j0.220240184) = 0$$

になり、a が複素数の値になってしまいますので、$b = 2.540716984$ はここでアウトです。複素数の素子は実現出来ません。

$b = 0.970467531$ を採用し、③式に代入しますと、

$$0.970467531ac = 0.721455762$$

$$ac = \frac{0.721455762}{0.970467531} = 0.743410509$$

$$c = \frac{0.743410509}{a} \quad ・・・⑧$$

になります。同じく $b = 0.970467531$ を⑤式に代入しますと、

$$a + 0.970467531 + c = 3.511184515$$

$$a + c = 3.511184515 - 0.970467531 = 2.540716984$$

$$a = 2.540716984 - c \quad ・・・⑨$$

になります。⑧式を⑨式に代入しますと、

$$a = 2.540716984 - \frac{0.743410509}{a}$$

になります。両辺に a をかけますと、

$$a^2 = 2.540716984a - 0.743410509$$

になります。右辺を移項して、

$$a^2 - 2.540716984a + 0.743410509 = 0$$

と言う方程式が出来ました。因数分解しますと、

$$(a - 2.203310897)(a - 0.337406087) = 0$$

になります。

$$a = 2.203310897 \text{ または } a = 0.337406087$$

となります。答が実数なので良いです。⑧式の

$$c = \frac{0.743410509}{a}$$

に代入しますと、$a = 2.203310897$ の時、

$$c = \frac{0.743410509}{2.203310897} = 0.337406087$$

です。$a = 0.337406087$ の時は、

$$c = \frac{0.743410509}{0.337406087} = 2.203310899$$

です。答は、

$a = 2.203310897$ の時、$b = 0.970467531$、$c = 0.337406087$

$a = 0.337406087$ の時、$b = 0.970467531$、$c = 2.203310899$

です。a と c とは逆でも良いことが分かります。図 2 です。

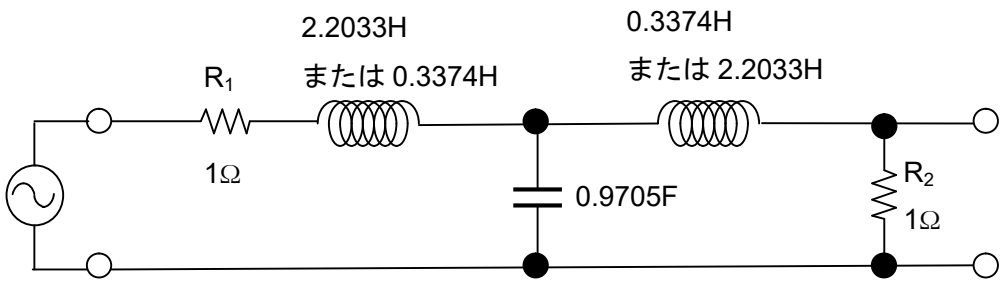

図 2

この結果は、「3 次ベッセル LC フィルターの設計」の章で、P－Q 法を用いて求めた 1[rad/sec]での利得が－3.01[dB]、R_1－R_2 型で $\frac{R_1}{R_2} = 1$ の 3 次ベッセル LC フィルターと同じです。

R_1－R_2 型で $\frac{R_1}{R_2} = 1$ の 3 次であれば、この解き方でベッセルフィルター以外の特性でも

計算出来ます。

2、リアクタンス回路が π（パイ）型の場合

図 3 の回路の、入力端子 V_I から出力端子 V_O までの伝達関数を求めます。出力端子 V_O につながる負荷のインピーダンスは、1Ω に対して十分高いものとします。

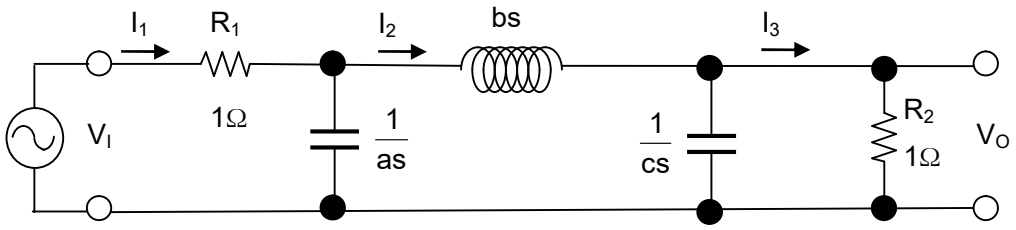

図 3

まず I_3 を求めます。I_2 を $\frac{1}{cs}$ と R_2 で分流し、I_3 は R_2 側の電流ですので、

$$I_3 = I_2 \times \frac{\frac{1}{cs}}{\frac{1}{cs}+1} = I_2 \times \frac{\frac{1}{cs}}{\frac{1+cs}{cs}} = I_2 \times \frac{1}{1+cs}$$

となります。（分流回路について理解不能の場合は、本章 5 を参照下さい。）出力電圧 V_O は、この電流に R_2 の抵抗値をかけ、

$$V_O = I_2 \times \frac{1}{1+cs} \times 1 = I_2 \times \frac{1}{1+cs} \quad ・・・⑩$$

です。次に I_2 を求めます。I_1 を $\frac{1}{as}$ と直並列回路 $bs + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{cs}}+\frac{1}{1}}$ で分流し、I_2 は直並列側電流ですので、

$$I_2 = I_1 \times \frac{\frac{1}{as}}{\frac{1}{as} + bs + \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{cs}}+\frac{1}{1}}}$$

となります。（理解不能の場合は、本章の 4 と 5 を参照下さい。）計算を進めますと、

$$= I_1 \times \frac{\frac{1}{as}}{\frac{1}{as} + bs + \frac{1}{1+cs}}$$

$$= I_1 \times \frac{\frac{1}{as}}{\frac{1+cs+bsas(1+cs)+as}{as(1+cs)}}$$

$$= I_1 \times \frac{1}{as} \times \frac{as(1+cs)}{abcs^3 + abs^2 + (a+c)s + 1}$$

$$= I_1 \times \frac{1+cs}{abcs^3 + abs^2 + (a+c)s + 1} \quad \cdot\cdot\cdot ⑪$$

です。

入力の電流 I_1 は、電圧 V_I を全体のインピーダンスで割ったものです。はしご型回路の場合、全体のインピーダンスは出力側から考えると楽です。

図 3 において $\frac{1}{cs}$ と 1Ω の並列インピーダンスは、$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{cs}} + \frac{1}{1}} = \frac{1}{1+cs}$ です。このインピーダンスが bs と直列になっていますから、$bs + \frac{1}{1+cs}$ です。

これが $\frac{1}{as}$ と並列になっていますから、$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{as}} + \frac{1}{bs + \frac{1}{1+cs}}} = \frac{1}{as + \frac{1}{bs + \frac{1}{1+cs}}}$ です。ここに 1Ω が直列に入りますから、全体のインピーダンス Z は、

$$Z = 1 + \frac{1}{as + \frac{1}{bs + \frac{1}{1+cs}}}$$

です。計算を進めますと、

$$= 1 + \cfrac{1}{as + \cfrac{1}{\cfrac{bs(1+cs)+1}{1+cs}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{as + \cfrac{1+cs}{bcs^2+bs+1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{as(bcs^2+bs+1)+1+cs}{bcs^2+bs+1}}$$

$$= 1 + \frac{bcs^2+bs+1}{abcs^3+abs^2+as+1+cs}$$

$$= 1 + \frac{bcs^2+bs+1}{abcs^3+abs^2+(a+c)s+1}$$

$$= \frac{abcs^3+abs^2+(a+c)s+1+bcs^2+bs+1}{abcs^3+abs^2+(a+c)s+1}$$

$$= \frac{abcs^3+b(a+c)s^2+(a+b+c)s+2}{abcs^3+abs^2+(a+c)s+1}$$

です。V_I を Z で割ったものが入力電流 I_1 ですから、

$$I_1 = V_1 \div Z$$

$$= V_I \times \frac{abcs^3+abs^2+(a+c)s+1}{abcs^3+b(a+c)s^2+(a+b+c)s+2} \quad \cdot\cdot\cdot ⑫$$

です。出力電圧 V_O の⑩式に、I_2 の⑪式を代入しますと、

$$V_O = I_1 \times \frac{1+cs}{abcs^3+abs^2+(a+c)s+1} \times \frac{1}{1+cs}$$

$$= I_1 \times \frac{1}{abcs^3 + abs^2 + (a+c)s + 1}$$

です。さらに入力電流 I_1 の⑫式を代入しますと、

$$= V_1 \times \frac{abcs^3 + abs^2 + (a+c)s + 1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2} \times \frac{1}{abcs^3 + abs^2 + (a+c)s + 1}$$

$$= V_1 \times \frac{1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2}$$

です。上式の両辺を V_I で割りますと、

$$\frac{V_o}{V_I} = \frac{V_I}{V_I} \times \frac{1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2}$$

$$= \frac{1}{abcs^3 + b(a+c)s^2 + (a+b+c)s + 2}$$

になりました。これが図 3 の回路の伝達関数です。図 1 の T 型の時と全く同じになりました。素子の値 a、b、c を求める計算は、T 型の時と全く同じですので省略致します。

3、1[rad/sec] での利得を－3.01[dB]にする理由

すっぴんのバタワースフィルターの伝達関数は、次数に関係なく 1[rad/sec]での利得が－3.01[dB]です。バタワースフィルターの利得グラフとベッセルフィルターの利得グラフとを比較しやすいように、ベッセルフィルターの利得も－3.01[dB]になる角周波数を 1[rad/sec]に移動させていると思われます。

4、並列回路の合成インピーダンス

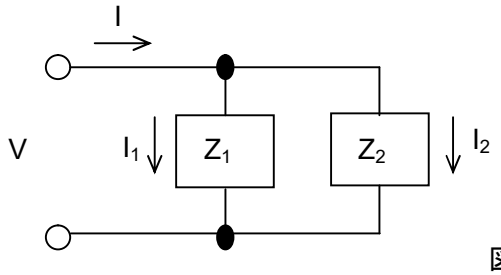

図 4

図 4 において、全体の電流 I は、

$$
\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 \\
&= \frac{V}{Z_1} + \frac{V}{Z_2} \\
&= \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right) \bullet V
\end{aligned}
$$

です。両辺に $\dfrac{1}{I \bullet \left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}\right)}$ をかけますと、

$$
\frac{I}{I \bullet \left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}\right)} = \frac{\left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}\right) \bullet V}{I \bullet \left(\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}\right)}
$$

$$
\frac{1}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}} = \frac{V}{I}
$$

になります。$\dfrac{V}{I}$ は並列回路の合成インピーダンス Z ですから、

$$
Z = \frac{1}{\dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2}}
$$

です。

5、電流の分流

同じく図 4 において、

$$
I_1 = \frac{V}{Z_1} \qquad I_2 = \frac{V}{Z_2}
$$

です。V を、全体の電流 I と並列回路の合成インピーダンス Z で表しますと、

$$
\begin{aligned}
V &= Z \bullet I \\
&= \frac{I}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} \\
&= \frac{I}{\frac{Z_2 + Z_1}{Z_1 Z_2}} \\
&= \frac{I \bullet Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}
\end{aligned}
$$

になります。この V を $I_1 = \frac{V}{Z_1}$ に代入しますと、

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{I \bullet Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \bullet \frac{1}{Z_1} \\
&= I \bullet \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}
\end{aligned}
$$

になります。V を $I_2 = \frac{V}{Z_2}$ に代入しますと、

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{I \bullet Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \bullet \frac{1}{Z_2} \\
&= I \bullet \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}
\end{aligned}
$$

になります。I は「インピーダンスの和分の相手側インピーダンス」に分流されます。

目次へ戻る