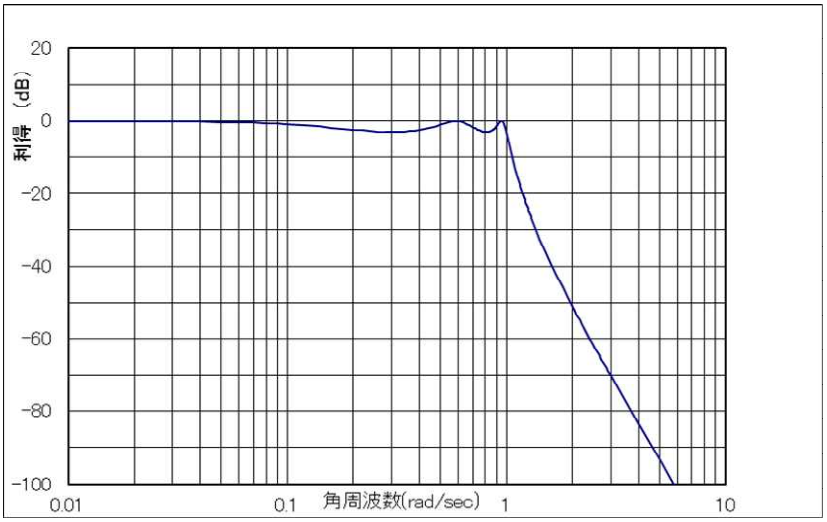
チェビシェフフィルター　（通過域波状阻止域無極近似）　2006 年 2 月 5 日　目次へ戻る

2024.2.14　2024.2.19　2024.2.20　2024.2.22　訂正



次数 n＝5　通過域うねり 3[dB]のチェビシェフフィルター

通過域では利得がうねりながら 1＝0[dB]（減衰無）に近似し、阻止域に入りますと利得がうねらずに減衰する方式です。

通過域でのうねりを許容した為、阻止域での減衰が急になります。上のグラフと「バタワースフィルター」の章 1 ページ目のグラフを比較しますと、正規化角周波数 2[rad/sec]の所で 20[dB]ほど違います。

チェビシェフフィルターと言う名前はチェビシェフ近似およびチェビシェフ多項式に由来しています。まず、チェビシェフ近似およびチェビシェフ多項式について、詳しく説明します。「n 次曲線について」の章もご覧下さい。

1、n が 3 の時のチェビシェフ近似

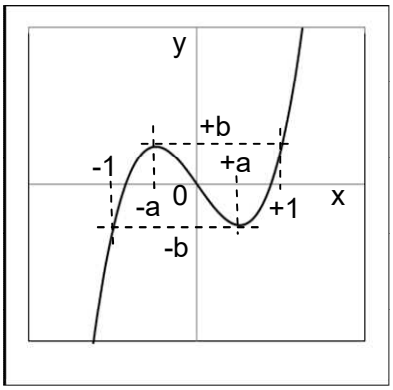
n 次の多項式、

$$y = p_0x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \bullet\bullet\bullet\bullet + p_n$$

が区間－1≦x≦＋1 においてとる y の値を、ある範囲内に収めたいと思います。その為に、各定数 p_0, p_1, p_2,・・・p_n をどのような値にするか決めることを、チェビシェフ近似と呼びます。まず n を 3 としてやってみます。式は次の様になります。

$$y = p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 \quad ・・・1－①$$

－1≦x≦＋1 において、1－①式の y 絶対値が b という範囲に収まる場合、グラフは下図のようになります。



上図を見て分ることを書き出しますと、

(1) x＝－a で 0 に接し、x＝＋1 で 0 を通過する 3 次曲線を、b だけ持ち上げた 3 次関数です。つまり x＝－a で 2 重根、x＝＋1 で単根を持つ 3 次関数プラス b です。

(2) x＝－1 で 0 を通過し、x＝＋a で 0 に接する 3 次曲線を、b だけ下げた 3 次関数です。つまり x＝－1 で単根、x＝＋a で 2 重根を持つ 3 次関数マイナス b です。

3 次式の因数分解は、

$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ の 3 根を α、β、γ とすれば、

$Ax^3+Bx^2+Cx+D=A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ のように因数分解される。

のでした。したがって、次の式が成り立ちます。

(1)から得られる式は、

$$y=p_0(x+a)^2(x-1)+b$$

(2)から得られる式は、

$$y=p_0(x-a)^2(x+1)-b$$

です。上の 2 式を変形しますと、

$$y-b=p_0(x+a)^2(x-1)$$

$$y+b=p_0(x-a)^2(x+1)$$

になります。この 2 式をかけ合わせますと、

$$(y-b)(y+b)={p_0}^2(x+a)^2(x-a)^2(x-1)(x+1)$$

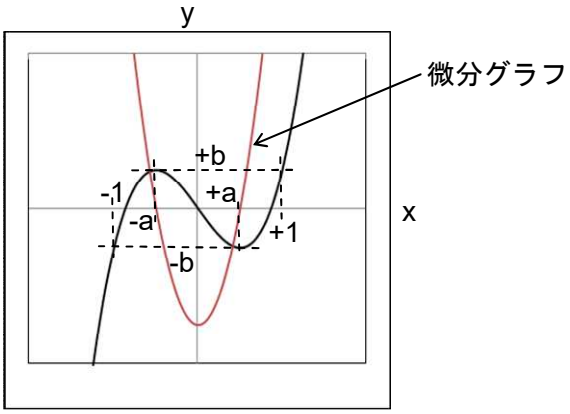
$$y^2-b^2={p_0}^2(x+a)^2(x-a)^2(x^2-1) \quad ・・・1－②$$

になります。次に p_0 を消す為に次の計算を行います。チェビシェフ氏が考えました。

1－①式を微分しますと、

$$\frac{dy}{dx} = 3p_0x^2 + 2p_1x + p_2 \quad ・・・1－③$$

になります。これを 1－①式のグラフと共に描きますと、



になります。上図より 1－①式を微分して 0 になる所、つまり 1－①式の極値であり、1－③式を＝0 と置いた時の根でもある点は、－a と＋a の 2 ヶ所であることが分ります。2 次式の因数分解の公式は、

$Ax^2 + Bx + C = 0$ の 2 根を α、β とすれば、
$Ax^2 + Bx + C = A(x - \alpha)(x - \beta)$ のように因数分解される。

ですので 1－③式は、

$$\frac{dy}{dx} = 3p_0x^2 + 2p_1x + p_2 = 3p_0(x + a)(x - a) \quad ・・・1－④$$

と因数分解されます。1－④式の両辺を 2 乗しますと、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3^2{p_0}^2(x + a)^2(x - a)^2$$

$$\frac{1}{3^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = {p_0}^2(x + a)^2(x - a)^2$$

です。この結果を 1－②式に代入しますと、

$$y^2 - b^2 = (x^2 - 1)\frac{1}{3^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

という微分方程式になります。この微分方程式を解くために変数分離を行い、x の項と y の

項に分けますと、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3^2\frac{y^2-b^2}{x^2-1}$$

$$(dy)^2(x^2-1) = (dx)^2 3^2(y^2-b^2)$$

$$(dy)^2\frac{x^2-1}{y^2-b^2} = (dx)^2 3^2$$

$$\frac{(dy)^2}{y^2-b^2} = \frac{(dx)^2 3^2}{x^2-1} \quad ・・・1-⑤$$

になります。1－⑤式の両辺の平方根を取ります。この時、次の 2 つの場合に分けて考える必要があります。

①、|x|≦1 の時

分母の平方根は十分に注意しなければなりません。|x|≦1 の時、|y|≦b になります（グラフ参照）ので y^2-b^2 および x^2-1 は、零または負になります。実数計算の場合、根号の中は零または正でなければなりません。引き算の順番を変えて、根号の外にマイナスをつけます。（根号の規約）

$$\frac{dy}{-\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{3dx}{-\sqrt{1-x^2}}$$

この式の微係数を消すために、両辺の分子分母に－1 を掛け、両辺を積分しますと、

$$\int\frac{-1}{\sqrt{b^2-y^2}}dy = 3\cdot\int\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

になります。公式集に載っている積分公式から、次式が得られます。

$$\cos^{-1}\frac{y}{b} = 3\cos^{-1}x + C \quad \text{（C は積分定数）}$$

1－①式のグラフを見ますと x=1 で y=b ですので、上式に代入しますと、

$$\cos^{-1}1 = 3\cos^{-1}1 + C$$

$$0 = 3\times 0 + C$$

$$C = 0$$

になります。したがって、

$$\cos^{-1}\frac{y}{b} = 3\cos^{-1}x + 0$$

$$\frac{y}{b} = \cos(3\cos^{-1}x)$$

$$y = b\cos(3\cos^{-1}x)$$

となります。

②、|x|≧1 の時

|x|≧1 の時、|y|≧b になります（グラフ参照）ので、y^2-b^2 も x^2-1 も零または正になります。根号の中は零または正になりますので、元の式のまま両辺の平方根を取ります。

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}} = \frac{3dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

この式の微係数を消すために、両辺を積分しますと、

$$\int \frac{1}{\sqrt{y^2-b^2}}dy = 3\cdot \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$

になります。公式集に載っている積分公式から、次式が得られます。

$$\cosh^{-1}\frac{y}{b} = 3\cosh^{-1}x + C$$

1－①式のグラフを見ますと x=1 で y=b ですので、上式に代入しますと、

$$\cosh^{-1}1 = 3\cosh^{-1}1 + C$$
$$0 = 3\times 0 + C$$
$$C = 0$$

になります。したがって、

$$\cosh^{-1}\frac{y}{b} = 3\cosh^{-1}x + 0$$
$$\frac{y}{b} = \cosh(3\cosh^{-1}x)$$
$$y = b\cosh(3\cosh^{-1}x)$$

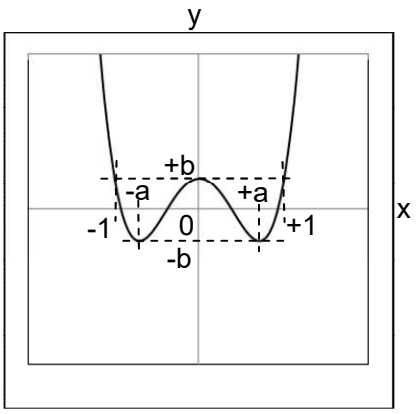
となります。

2、n が 4 の時のチェビシェフ近似

次に n を 4 としてやってみます。式は次の様になります。

$$y = p_0x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4 \quad ・・・2－①$$

2－①式において、－1≦x≦＋1 の y 絶対値が b という範囲に収まる場合、そのグラフは下図のようになります。x=0 で y=＋b であることを記憶して下さい。



上図を見て分ることを書き出しますと、

(1) x＝0 で 0 に接し、x＝＋1 と x＝－1 で 0 を通過する 4 次曲線を、b だけ持ち上げた 4 次関数です。つまり、x＝0 で 2 重根、x＝＋1 と x＝－1 で単根を持つ 4 次関数プラス b です。

(2) x＝－a と x＝＋a で 0 に接する 4 次曲線を b だけ下げた 4 次関数です。つまり、x＝－a と x＝＋a で 2 重根を持つ 4 次関数マイナス b です。

(1)から得られる式は、

$$y = p_0 x^2 (x-1)(x+1) + b$$

(2)から得られる式は、

$$y = p_0 (x+a)^2 (x-a)^2 - b$$

です。上記 2 式を変形しますと、

$$y - b = p_0 x^2 (x-1)(x+1)$$

$$y + b = p_0 (x+a)^2 (x-a)^2$$

になります。この 2 式をかけ合わせますと、

$$(y-b)(y+b) = {p_0}^2 x^2 (x+a)^2 (x-a)^2 (x-1)(x+1)$$

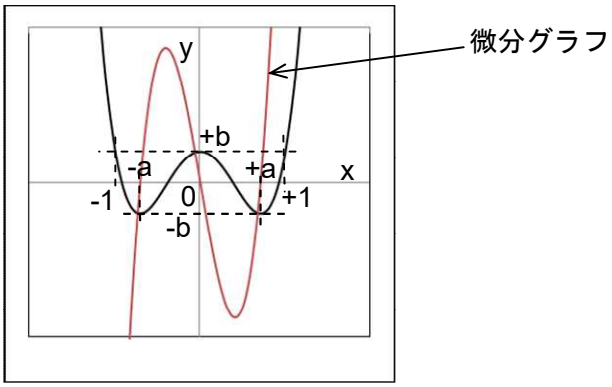
$$y^2 - b^2 = {p_0}^2 x^2 (x+a)^2 (x-a)^2 (x^2-1) \quad ・・・2－②$$

になりました。

次に定数 p_0 を消す為に次の計算を行います。2－①式を微分しますと、

$$\frac{dy}{dx} = 4p_0x^3 + 3p_1x^2 + 2p_2x + p_3 \quad ・・・2－③$$

になります。これを 2－①式のグラフと共に描きますと、



になります。上のグラフを見ますと、2－①式を微分して 0 になる所、つまり 2－①式の極値であり､2－③式を＝0 と置いた時の根は､0 と－a と＋a の 3 ヶ所であることが分ります。

2－③式は次のように因数分解されます。

$$\frac{dy}{dx} = 4p_0x^3 + 3p_1x^2 + p_2x + p_3 = 4p_0x(x+a)(x-a) \quad ・・・2－④$$

2－④の両辺を 2 乗しますと、

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4^2{p_0}^2x^2(x+a)^2(x-a)^2$$

$$\frac{1}{4^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = {p_0}^2x^2(x+a)^2(x-a)^2$$

になります。この式を 2－②式に代入しますと、

$$y^2 - b^2 = (x^2-1)\frac{1}{4^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

になります。この微分方程式を n＝3 の時と比べますと、3 の所が 4 になっているだけで全く同じ形をしています。計算するまでも無く、

|x|≦1 の時

$$y = b\cos(4\cos^{-1}x)$$

|x|≧1 の時

$$y = b\cosh(4\cosh^{-1}x)$$

です。

3、n が 4 以上の時のチェビシェフ近似

他の n については、同じ考え方で導出できますので省略致します。一般的な n について計算した結果は、

|x|≦1 の場合、

$$y_n = b\cos(n\cos^{-1}x) \quad ・・・3－①$$

|x|≧1 の場合、

$$y_n = b\cosh(n\cosh^{-1}x) \quad ・・・3－②$$

です。

4、多項式で表すチェビシェフ近似

多項式で出てくるはずの y が、三角関数と逆三角関数、双曲線関数と逆双曲線関数で出て来ましたので驚いてしまいます。この y が x の多項式であることを、次のようにして示すことが出来ます。

(1) |x|≦1 の時、

$$y_n = b\cos(n\cos^{-1}x)$$

でした。

n＝1 の時は、

$$y_1 = b\cos(\cos^{-1}x)$$

です。これは、b・{（アークコサイン x ）のコサイン} です。つまり、b・{（コサインの値が x になる角度）のコサイン} ですから、

$$= bx$$

になります。

n＝2 の時は、

$$y_2 = b\cos(2\cos^{-1}x)$$

です。$\cos^{-1}x$ は角度を表していますから、θ（シーター）と置きますと、

$$= b\cos 2\theta$$

になります。これは cos の倍角公式が使えますので、

$$= b(2\cos^2\theta - 1)$$

$$= b[2\{\cos(\cos^{-1}x)\}^2 - 1]$$

$$= b(2x^2 - 1)$$

になります。

n＝3 の時は、

$$y_3 = b\cos(3\cos^{-1}x)$$

です。$\cos^{-1}x$ は角度を表していますから、θ と置きますと、

$$= b\cos 3\theta$$

になります。これは cos の 3 倍角公式が使えますので、

$$= b(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$
$$= b[4\{\cos(\cos^{-1}x)\}^3 - 3\cos(\cos^{-1}x)]$$
$$= b(4x^3 - 3x)$$

になります。

同様に計算して、

$$y_4 = b(8x^4 - 8x^2 + 1)$$
$$y_5 = b(16x^5 - 20x^3 + 5x)$$
$$y_6 = b(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)$$
$$y_7 = b(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x)$$
$$y_8 = b(128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1)$$
$$y_9 = b(256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x)$$
$$y_{10} = b(512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1)$$

・

・

・

が得られます。

(2) |x|≧1 の時、

$$y_n = b\cosh(n\cosh^{-1}x)$$

でした。

n＝1 の時は、

$$y_1 = b\cosh(\cosh^{-1}x)$$

です。これは、b・（アーク cosh x の cosh）です。つまり、b・{（cosh の値が x になる数）の cosh} ですから、

$$= bx$$

です。

n＝2 の時は、

$$y_2 = b\cosh(2\cosh^{-1}x)$$

です。$\cosh^{-1}x$ を φ（ファイ）と置きますと、

$$= b\cosh 2\varphi$$

になります。これは cosh の 2 倍公式が使えますので、

$$y_2 = b(2\cosh^2\varphi - 1)$$
$$= b[2\{\cosh(\cosh^{-1}x)\}^2 - 1]$$

$$= b(2x^2 - 1)$$

になります。

n＝3 の時は、

$$y_3 = b\cosh(3\cosh^{-1}x)$$

です。$\cosh^{-1}x$ を φ と置きますと、

$$= b\cosh 3\varphi$$

になります。これは cosh の 3 倍公式が使えますので、

$$= b(4\cosh^3\varphi - 3\cosh\varphi)$$

$$= b[4\{\cosh(\cosh^{-1}x)\}^3 - 3\cosh(\cosh^{-1}x)]$$

$$= b(4x^3 - 3x)$$

になります。

同様に計算して、

$$y_4 = b(8x^4 - 8x^2 + 1)$$

$$y_5 = b(16x^5 - 20x^3 + 5x)$$

$$y_6 = b(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)$$

$$y_7 = b(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x)$$

$$y_8 = b(128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1)$$

$$y_9 = b(256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x)$$

$$y_{10} = b(512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1)$$

・

・

・

となり、$|x| \leqq 1$ の時と全く同じ結果を得ます。これで、y が x の多項式であることが分りました。

5、周波数伝達関数への変換

y が x の多項式であることが分りました。変数を x から ω に変更した、次のような関数を考えます。

$|\omega| \leqq 1$ の時

$$y = b\cos(n\cos^{-1}\omega)$$

$|\omega| \geqq 1$ の時

$$y = b\cosh(n\cosh^{-1}\omega)$$

y は入出力間の大きさの変化、つまり利得と決めます。ω は入力正弦波の正規化角周波数です。この関数は、利得が入力正弦波の正規化角周波数 ω で決まる関数です。

この関数の b の値を、通過域での許容されるうねりに合わせることにより、「フィルタ近似とは」の章で述べた元関数の持つべき性質にマッチします。

y が x の多項式であることを、先ほど説明しました。そして x を ω に直しました。

入力正弦波の正規化角周波数 ω の位置にしたがって、多項式倍される利得はどうしたら得られますか。

「s とは何か」の章で記述しましたが、ω に比例した利得は正弦波を微分すると得られるのでした。伝達関数に s があれば、入力された正弦波は微分され、ω 倍されて出て来ます。

同様に s^n があれば、入力された正弦波は n 回微分され、ω^n 倍されて出て来ます。

ω の多項式を、s の多項式に直せば良いのです。

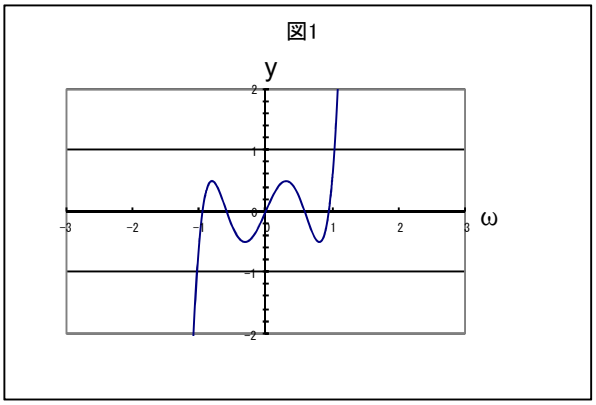
伝達関数を作る前に、ω の関数である周波数伝達関数、略して ω 特を次の様に作ります。それを s の多項式である伝達関数に直します。

このことについては、「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章もご参照下さい。

元関数を用意します。図 1 は n＝5、b＝0.5 の場合です。

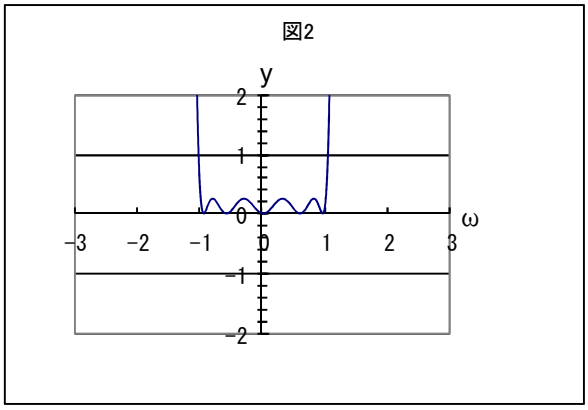
|ω|≦1 の時、$y = 0.5\cos(5\cos^{-1}\omega)$ です。|ω|≧1 の時、$y = 0.5\cosh(5\cosh^{-1}\omega)$ です。

正規化角周波数 ω を横軸にしてあります。縦軸 y は利得になります。正規化角周波数の値が利得を決める関数になっています。



ω の－1 から＋1 の間で y の値は＋b＝＋0.5 と－b=－0.5 の間をうねり、この区間を外れると激しく増加または減少しています。こうして元関数が出来上がりました。

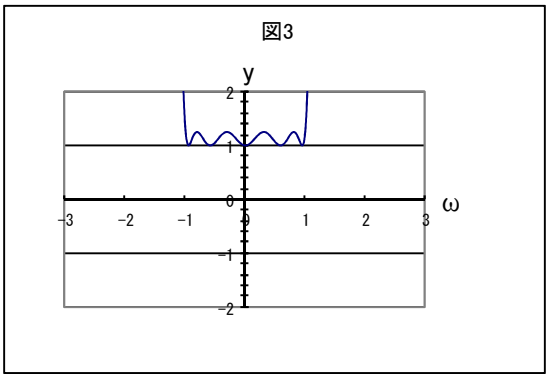
n が奇数の場合は奇関数になっているので 2 乗して偶関数にする必要があります。|ω|≦1 の時、 $y = 0.5^2\{\cos(5\cos^{-1}\omega)\}^2$ です。|ω|≧1 の時、$y = 0.5^2\{\cosh(5\cosh^{-1}\omega)\}^2$ です。



2 乗した結果、図 2 の様に ω の－1 から＋1 の間で最小値が 0 最大値が b^2＝0.5^2＝0.25 の偶関数が出来上がりました。この関数を周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特にするわけにはいきません。周波数が大きくなるほど出力は小さくならなければならないからです。

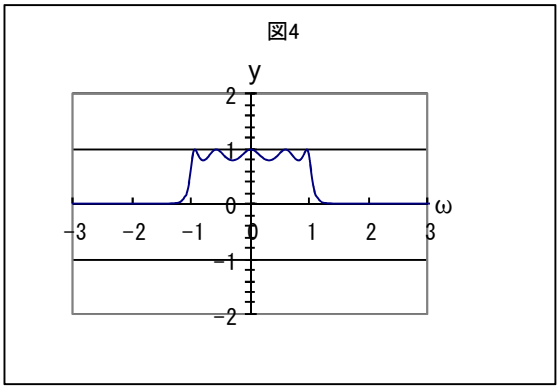
この関数の逆数を 2 乗 ω 特にしたいところですが、現在 ω の－1 から＋1 での利得が 0 付近ですので、この関数をこのまま逆数にしますと、低い周波数での利得が極端に大きくなってしまいます。低い周波数での利得を 1 にするためには、逆数にする式の ω＝－1 から ω＝＋1 での利得が 1 付近でなければなりません。

そのために、この関数に 1 を足します。|ω|≦1 の時、$y = 0.5^2\{\cos(5\cos^{-1}\omega)\}^2 + 1$です。|ω|≧1 の時、$y = 0.5^2\{\cosh(5\cosh^{-1}\omega)\}^2 + 1$です。ω の－1 から＋1 の間で最小値が 0、最大値が $b^2 = 0.25$ の偶関数に 1 を足すのですから、この区間での分母の最大値は $1 + b^2 = 1.25$、最小値は$1 + 0 = 1$となります。図 3 です。



次に、この関数を逆数にします。|ω|≦1 の時、$y = \dfrac{1}{0.5^2\{\cos(5\cos^{-1}\omega)\}^2 + 1}$です。|ω|≧1 の時、$y = \dfrac{1}{0.5^2\{\cosh(5\cosh^{-1}\omega)\}^2 + 1}$です。

逆数の値はωの－1から＋1の間で最大値が1、最小値は$\frac{1}{1+b^2}=0.8$になります。これが周波数伝達関数の絶対値の2乗、つまり2乗ω特になります。図4です。

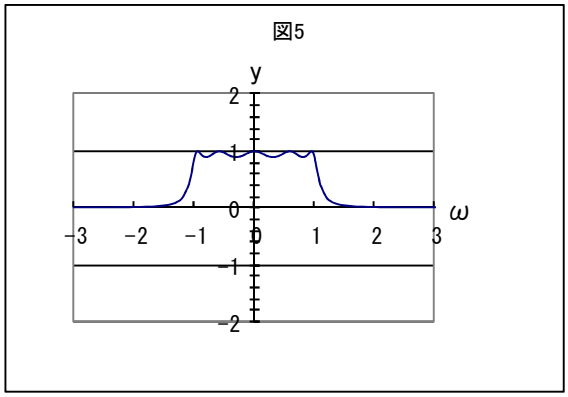


フィルターの出力はこの平方根になります。

$|\omega|\leqq 1$の時、$y=\sqrt{\dfrac{1}{0.5^2\{\cos(5\cos^{-1}\omega)\}^2+1}}$

$|\omega|\geqq 1$の時、$y=\sqrt{\dfrac{1}{0.5^2\{\cosh(5\cosh^{-1}\omega)\}^2+1}}$

です。図5です。これが周波数伝達関数の絶対値です。



以上の例により周波数伝達関数の絶対値の2乗、略して2乗ω特は、

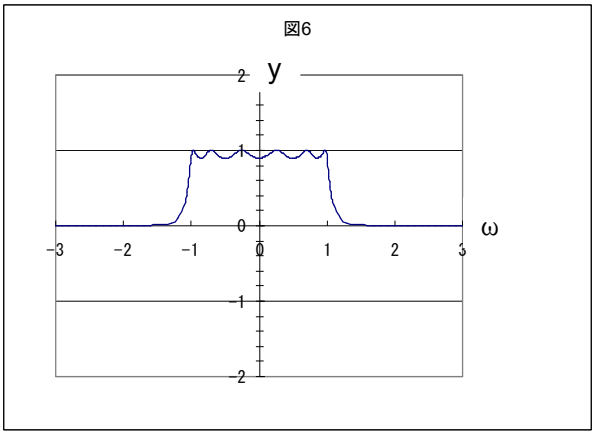
$-1\leqq\omega\leqq+1$の時、$y=\dfrac{1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1}$ ・・・5－①

$\omega\leqq-1$または$+1\leqq\omega$の時、$y=\dfrac{1}{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2+1}$ ・・・5－②

となります。

ω の絶対値が 1 より大きいところでは、$\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2$ の値は非常に大きくなり、b^2 をかけてもまだ大きく、1 をたしているので更に少し大きくなります。その値を逆数にする為、阻止域での利得が小さな値になる訳です。b の値は大きいほど減衰は大きくなりますが、通過域でのうねりも大きくなります。

下の図 6 では n＝6、b＝0.5 の、n が偶数の場合を描きました。



チェビシェフフィルターの場合、正規化角周波数 0[rad/sec]での利得が、

① n が奇数の場合は 1。

② n が偶数の場合は、通過域うねりの一番大きなところ。波の底。

からはじまることを記憶して下さい。元関数の ω＝0 での値が関係しています。

6、伝達関数への変換

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、略して 2 乗 ω 特を、s の 1 次や 2 次の伝達関数の積に直さなければ回路が実現出来ません。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章で書きましたように、伝達関数にするには、

・周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特の分母を因数分解し、

・得られた根を 90 度反時計式に回転し、

・複素平面左半面の根のみを採用します。

こうして得られた s の実根からは、1 次の伝達関数分母が出来ます。また、こうして得られた s の共役複素根からは、2 次の伝達関数分母が出来ます。

それぞれの分子に、分母の定数項と同じ数を載せれば出来上がりです。分子と分母の定数項を同じにする訳は、角周波数 0 での利得を 1 にする為です。

伝達関数の s に、入力信号の角周波数に従った＋jω と－jω が代入され、角周波数 ω の位置に従った出力が出ます。

今回の周波数伝達関数の絶対値の２乗、略して２乗ω特分母の因数分解には、２つの方法があります。三角関数および逆三角関数で表された２乗ω特を因数分解する方法と、x の多項式で表された２乗ω特を因数分解する方法です。

５ 次以上の多項式の方程式には、根を求める代数的解法がないので、三角関数および逆三角関数で表された２乗ω特を因数分解します。因数分解するには、5－①式の２乗ω特の分母を＝0 と置き、この方程式を成り立たせるωの値（根）を求めます。

$$b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1=0 \quad ・・・・・6－①$$

$$b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2=-1$$

$$\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2=\frac{-1}{b^2}$$

$$\cos(n\cos^{-1}\omega)=\pm\sqrt{\frac{-1}{b^2}}$$

になりました。b は通過域のうねりを決定する係数です。b は必ず正の数ですから、分母の根号が外れ、

$$\cos(n\cos^{-1}\omega)=\pm\frac{\sqrt{-1}}{b}=\pm\frac{j}{b}=0\pm j\frac{1}{b} \quad ・・・・・6－②$$

と言う複素数になります。ここで cos が複素関数の場合の計算を行って見ます。

$$\cos z=\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$$

において z＝x＋jy ならば、

$$\cos(x+jy)=\frac{e^{j(x+jy)}+e^{-j(x+jy)}}{2}=\frac{e^{(jx-y)}+e^{(-jx+y)}}{2}=\frac{e^{jx}\cdot e^{-y}+e^{-jx}\cdot e^{y}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\cos x+j\sin x)e^{-y}+(\cos x-j\sin x)e^{y}\}$$

$$=\frac{1}{2}(e^{-y}\cos x+e^{-y}j\sin x+e^{y}\cos x-e^{y}j\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos x(e^{y}+e^{-y})+j\sin x(e^{-y}-e^{y})\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos x(e^{y}+e^{-y})-j\sin x(e^{y}-e^{-y})\}$$

$$=\cos x\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-j\sin x\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

$$=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y \quad ・・・・・6－③$$

となります。cos の変数が複素数の時に、答えも複素数になることが分ります。したがって、

6－②式左辺、$\cos(n\cos^{-1}\omega)$ 中の $\cos^{-1}\omega$ の値を、複素数 x＋jy と置いてみますと、

$$\cos\{n(x+jy)\} = \cos(nx+jny)$$
$$= \cos nx \cosh ny - j\sin nx \sinh ny$$

になります。これが 6－②式の右辺と同値、

$$= 0 \pm j\frac{1}{b}$$

にならなければなりません。実数部は、

$$\cos nx \cosh ny = 0$$

になり、虚数部は、

$$\sin nx \sinh ny = \mp\frac{1}{b}$$

になるはずです。実数部の cos nx cosh ny＝0 を考えますと、変数が実数の時、cosh ny は 0 になることの無い関数（本章 36 ページの cosh のグラフをご参照下さい）ですので、cos nx が 0 でなければなりません。

cos を 0 にする nx は、

$$nx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

であり、

$$x = \frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \frac{7\pi}{2n}, \frac{9\pi}{2n}, \frac{11\pi}{2n} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$
$$= \frac{2k-1}{2n}\pi$$

k＝1,2,3・・・・・

となります。これらの nx の値の時、虚数部の sin nx は、

$$\sin nx = \sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{5\pi}{2}, \sin\frac{7\pi}{2}, \sin\frac{9\pi}{2}, \sin\frac{11\pi}{2} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet = \pm 1$$

ですから、

$$\sin nx \sinh ny = \mp\frac{1}{b}$$ は、

$$\pm 1 \bullet \sinh ny = \mp\frac{1}{b}$$

$$\sinh ny = \mp\frac{1}{b}$$

$$ny = \sinh^{-1} \mp \frac{1}{b}$$

となります。sinh は奇関数なので $\sinh^{-1} - \frac{1}{b}$ は、$-\sinh^{-1}\frac{1}{b}$ となり、

$$ny = \mp \sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

$$y = \mp \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

になります。これで、x と y の値を求めることが出来ました。忘れてならないのは、x+jy は $\cos^{-1}\omega$ の値を、仮に置いたものだったことです。ω の値を求めますと、

$$\cos^{-1}\omega = x + jy$$

$$= \frac{2k-1}{2n}\pi \mp j\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

$$\omega = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi \mp j\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

になります。さらに変数が複素数の場合の cos の加法定理、6－③式によって、

$$\omega = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) \pm j\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

k＝1,2,3・・・・・

になります。これが、6－①式の方程式を成り立たせる ω の値＝根です。この 2 乗 ω 得の根に j をかけ、複素平面で 90 度反時計式に回転させたものが伝達関数分母の s の根ですので、（このことについては「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご参照下さい）

$$j\omega = j\left\{\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) \pm j\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\right\}$$

$$= \mp\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) + j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) \quad ・・・6－④$$

k＝1,2,3・・・・・

となります。無限個の根が生じますが、6－④式の sin も cos も変数が偶数分の奇数の分数なので、1 周回っては同じ根をなぞって行きます。無限個の根から複素平面左半面の根のみを 1 回だけ取り出せば良いです。

双曲線関数でやっても同じ結果になることを示します。5－②式の 2 乗 ω 特分母を＝0 と

置いて、この方程式を成り立たせる ω の値を求めます。

$$b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2+1=0$$
$$b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2=-1$$
$$\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega)\}^2=\frac{-1}{b^2}$$
$$\cosh(n\cosh^{-1}\omega)=\pm\sqrt{\frac{-1}{b^2}}$$

になります。b は通過域のうねりを決定する係数です。b は必ず正の数ですから、分母の根号が外れ、

$$\cosh(n\cosh^{-1}\omega)=\pm\frac{\sqrt{-1}}{b}=\pm\frac{j}{b}=0\pm j\frac{1}{b}$$

と言う複素数になります。ここで cosh が複素関数の場合の計算を行って見ます。

$$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$$

において z=x+jy ならば、

$$\cosh(x+jy)=\frac{e^{x+jy}+e^{-(x+jy)}}{2}=\frac{e^xe^{jy}+e^{-x}e^{-jy}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\{(\cos y+j\sin y)e^x+(\cos y-j\sin y)e^{-x}\}$$
$$=\frac{1}{2}(e^x\cos y+e^xj\sin y+e^{-x}\cos y-e^{-x}j\sin y)$$
$$=\frac{1}{2}\{(e^x+e^{-x})\cos y+(e^x-e^{-x})j\sin y\}$$
$$=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos y+\frac{e^x-e^{-x}}{2}j\sin y$$
$$=\cosh x\cos y+j\sinh x\sin y \quad ・・・6－⑤$$

となります。cosh の変数が複素数の時に、答えも複素数になることが分ります。$\cosh^{-1}\omega$ の値を、複素数 x+jy と置いてみますと、

$$\cosh\{n(x+jy)\}=\cosh(nx+jny)$$
$$=\cosh nx\cos ny+j\sinh nx\sin ny$$
$$=0\pm j\frac{1}{b}$$

になります。

つまり、

$$\cosh nx \cos ny = 0$$

と、

$$\sinh nx \sin ny = \pm\frac{1}{b}$$

が成り立たなければなりません。まず第一に、cosh nx cos ny ＝ 0 を考えますと、変数が実数の時、cosh ny は 0 になることの無い関数（本章 36 ページの cosh のグラフをご参照下さい）ですので、cos ny＝0 でなければなりません。つまり、

$$ny = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$ny = \frac{2k-1}{2}\pi \qquad k=1,2,3\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$y = \frac{2k-1}{2n}\pi \qquad k=1,2,3\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

となります。これらの y の値の時、sin ny＝±1 ですから、

$$\sinh nx \sin ny = \pm\frac{1}{b}$$

$$\sinh nx \bullet \pm 1 = \pm\frac{1}{b}$$

$$\sinh nx = \frac{1}{\pm 1} \bullet \pm\frac{1}{b} = \pm 1 \bullet \pm\frac{1}{b} = \pm\frac{1}{b}$$

$$nx = \sinh^{-1}\pm\frac{1}{b}$$

です。sinh は奇関数ですので $\sinh^{-1}-\frac{1}{b}$ は、$-\sinh^{-1}\frac{1}{b}$ となり、

$$x = \pm\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}$$

になります。これで x と y の値を求めることが出来ました。忘れてならないのは、x＋jy は $\cosh^{-1}\omega$ の値を仮に置いたものだったことです。ω の値を求めますと、

$$\cosh^{-1}\omega = x + jy$$

$$= \frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b} \pm j\frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$\omega = \cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b} \pm j\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

となりますが、変数が複素数の場合の cosh の加法定理、6－⑤式によって、

$$\omega = \cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \pm j\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

k＝1,2,3・・・・・

になります。s の根は複素平面で ω の根に j をかけたものですから、

$$j\omega = \mp\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) + j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

k＝1,2,3・・・・・

となります。先程の $\cos(n\cos^{-1}\omega)$ の時の結果と同じです。三角関数で計算しても、双曲線関数で計算しても全く同じ結果になります。これは cos j(x＋jy)＝cosh (x＋jy)、cosh j(x＋jy)＝cos (x＋jy)が関係しています。詳しくは、本章 11、をご覧下さい。

7、根の取り出し

現在、無限個の根が生じています。6－④式または上式の sin も cos も、変数が偶数分の奇数の分数なので、1 周回っては同じ根をなぞって行きます。これらの根から複素平面左半面の根のみを、1 回だけ取り出す方法を考えます。結論だけ知りたい方は 8、へ飛んで下さい。

(1) k の値の決定

k＝1,2,3・・・でした。s の根の実数部の sin は k が 1 の時、

$$\left[\mp\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1} = \mp\sin\frac{\pi}{2n}$$

となります。k に 2n＋1 を代入してみますと、

$$\left[\mp\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n+1} = \mp\sin\frac{2(2n+1)-1}{2n}\pi = \mp\sin\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi$$

$$= \mp\sin(2\pi+\frac{\pi}{2n}) = \mp\sin\frac{\pi}{2n}$$

になります。k が 2n＋1 の時、k が 1 の時の sin 値と一致します。このあとの k は 1 周目と同じ値をとって行きます。つまり、k は 1 から 2n まで採用すれば良いことが分ります。

次に $\mp\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$ の－sin と＋sin の違いについて考えます。sin は奇関数なので、

$$-\sin\frac{2k-1}{2n}\pi = \sin\left(-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

です。k が 1 の時の－sin 値は、

$$\left[\sin\left(-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right]_{k=1}=\sin\frac{-\pi}{2n}$$

です。一方 k が 2n の時の＋sin 値は、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n}=\sin\frac{4n-1}{2n}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2n}\right)=\sin\frac{-\pi}{2n}$$

ですので、－sin の最初の値は、＋sin の最後の値と一致します。

k が 2 の時の－sin 値は、

$$\left[\sin\left(-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right]_{k=2}=\sin\frac{-3\pi}{2n}$$

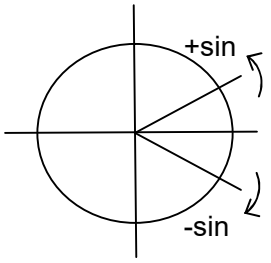
です。一方 k が 2n－1 の時の＋sin は、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n-1}=\sin\frac{2(2n-1)-1}{2n}\pi=\sin\frac{4n-3}{2n}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{3\pi}{2n}\right)=\sin\frac{-3\pi}{2n}$$

ですので、－sin の 2 番目の値は、＋sin の最後から 2 番目の値と一致します。

k が 2n の時の－sin 値は、

$$\left[\sin\left(-\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right]_{k=2n}=\sin\left(-\frac{4n-1}{2n}\pi\right)=\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{2n}\right)=\sin\frac{\pi}{2n}$$



です。一方 k が 1 の時の＋sin は、

$$\left[\sin\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1}=\sin\frac{\pi}{2n}$$

となり、－sin の最後の値は、＋sin の最初の値と一致します。

時計回りで、$\frac{2k-1}{2n}\pi$ [rad]ごとの sin 値を採用して行くのが－sin であり、反時計回りで同じ角度ごとの sin 値を採用して行くのが＋sin です。どちらも採用される sin 値は、順番が逆になるだけで全く同じです。したがって＋sin だけで考えることにします。

次に s の根の虚数部の cos は k が 1 の時、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=1}=\cos\frac{\pi}{2n}$$

となり、k が 2n＋1 の時、

$$\left[\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right]_{k=2n+1}=\cos\frac{2(2n+1)-1}{2n}\pi=\cos\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2n}\right)=\cos\frac{\pi}{2n}$$

となります。k が 2n＋1 の時 cos の値は、k が 1 の時の cos の値と一致します。この後の k では 1 周目と同じ値をとって行きます。つまり cos についても、k は 1 から 2n まで採用すれば良いことが分ります。

次に s の根の実数部の $\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$ を考えます。b は必ず正の値です。$\sinh^{-1}$ の答も正となります。n も必ず正の値ですので、括弧内は必ず正となります。sinh は変数が正の時、答えも正です。$\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$ は常に正の値です。したがって s の根の実数部のうち、$\sin\frac{2k-1}{2n}\pi$ が負であれば複素平面左半面の根です。

sin の値は π を超え 2π 未満で負になるので、$\pi<\frac{2k-1}{2n}\pi<2\pi$ の sin 値を取り出せば良いです。

まず不等式 $\pi<\frac{2k-1}{2n}\pi$ を解きますと、

$$\pi<\frac{2k-1}{2n}\pi$$

$$1<\frac{2k-1}{2n}$$

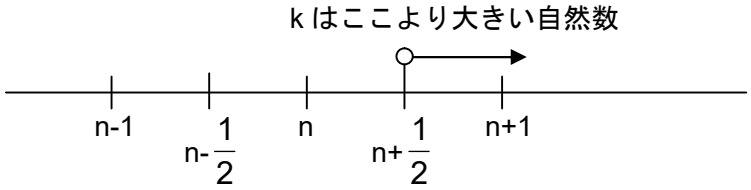
$$2n<2k-1$$ （2n>0 ですから不等号はそのままです）

$$2n+1<2k$$

$$n+\frac{1}{2}<k$$

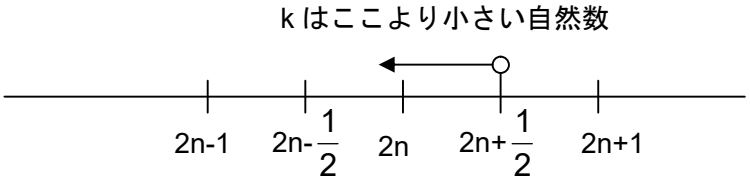
になります。

$n+\frac{1}{2}$ より大きい k とは、k が自然数の場合、下図に示す様に k が n＋1 以上なら良いということです。



次に不等式 $\frac{2k-1}{2n}\pi < 2\pi$ を解きますと、$k < 2n + \frac{1}{2}$ になります。

$2n + \frac{1}{2}$ より小さい k とは、k が自然数の場合、下図に示す様に k が 2n 以下なら良いということです。



つまり、k の値は、n＋1≦k≦2n です。この値で sin 値は負になり、s の根の実数部は負になります。

ここまでのことをまとめますと、s の根の式は、

$$\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right) + j\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

n＋1≦k≦2n

となります。sin も cos も、同じ n＋1≦k≦2n での値を採用します。

(2) 更なる簡単化

更に計算の簡単化を考えます。s の根の実数部、$\sin\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ が負になる k は、n＋1≦k≦2n ですから、k＝n＋m、m＝1,2,3・・・,n と置くことが出来ます。すると、

$$\frac{2k-1}{2n}\pi = \frac{2(n+m)-1}{2n}\pi = \frac{2n+2m-1}{2n}\pi = \pi + \frac{2m-1}{2n}\pi$$

です。三角関数の加法定理により、

$$\sin\frac{2k-1}{2n}\pi = \sin\left(\pi + \frac{2m-1}{2n}\pi\right) = \sin\pi\cos\frac{2m-1}{2n}\pi + \cos\pi\sin\frac{2m-1}{2n}\pi$$

$$= -\sin\frac{2m-1}{2n}\pi$$

$$\cos\frac{2k-1}{2n}\pi = \cos\left(\pi + \frac{2m-1}{2n}\pi\right) = \cos\pi\cos\frac{2m-1}{2n}\pi - \sin\pi\sin\frac{2m-1}{2n}$$

$$= -\cos\frac{2m-1}{2n}\pi \qquad m=1,2,3\cdot\cdot\cdot,n$$

が採用する sin 値、cos 値となります。さらに n が偶数と奇数の場合に分けて考えます。

(3) n が偶数の場合

n が偶数の場合、m の最大値は n なので偶数です。したがって、m の個数は n と同じ値の偶数個になります。m の一番前と一番後ろ、二番目と後ろから二番目、三番目と後ろから三番目と言う風にペアを組んでいくと、$\frac{n}{2}$ 個のペアが出来て仲間はずれは出来ません。

ここで m の一番前の値 1 と、一番後ろの値 n について、sin 値、cos 値の計算を行ってみますと、

m＝1 では、

$$\left[-\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=1} = -\sin\frac{\pi}{2n}$$

$$\left[-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=1} = -\cos\frac{\pi}{2n}$$

m＝n では、

$$\left[-\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=n} = -\sin\frac{2n-1}{2n}\pi = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= -\left(\sin\pi\cos\frac{\pi}{2n} - \cos\pi\sin\frac{\pi}{2n}\right) = -\sin\frac{\pi}{2n}$$

$$\left[-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=n} = -\cos\frac{2n-1}{2n}\pi = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right)$$

$$= -\left(\cos\pi\cos\frac{\pi}{2n} + \sin\pi\sin\frac{\pi}{2n}\right) = \cos\frac{\pi}{2n}$$

となり、sin については一番前と一番後ろで同じ値、cos については一番前と一番後ろで符号だけが逆になることが分かります。これは m＝2 と m＝n－1 のペアについても、また他のペアでも成り立ちます。したがって、すべての m について sin 値、cos 値の計算をする

必要は無く、各ペアの前側の m＝1 から m＝$\frac{n}{2}$までの sin 値、cos 値を計算すれば良いです。各ペア後側の sin 値は前側と同値、後側の cos 値は前側の符号だけ変えれば良いです。（これは共役根を表しています。）こうして出来た全ペアの sin 値、cos 値から s の根を作ります。

(4) n が奇数の場合

n が奇数の場合、m の最大値は n なので奇数です。したがって、m の個数は n と同じ値の奇数個になります。m の一番前と一番後ろ、二番目と後ろから二番目、三番目と後ろから三番目と言う風にペアを組んでいくと、真ん中に 1 個の仲間はずれが出来ます。n から仲間はずれの 1 個を引き、2 で割った、$\frac{n-1}{2}$個のペアが出来ます。

真ん中の仲間はずれの m 値は、ペアの数が 1 ならば m＝2、ペアの数が 2 つなら m＝3、という様に、ペアの数＋1＝$\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$で示されます。

仲間はずれの$m=\frac{n+1}{2}$について、sin 値、cos 値の計算を行ってみますと、

$$\left[-\sin\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=\frac{n+1}{2}}=-\sin\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1}{2n}\pi=-\sin\frac{n}{2n}\pi=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$$

$$\left[-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right]_{m=\frac{n+1}{2}}=-\cos\frac{2\left(\frac{n+1}{2}\right)-1}{2n}\pi=-\cos\frac{n}{2n}\pi=-\cos\frac{\pi}{2}=0$$

になり、6－④式の s の根は虚数部の無い実根、

$$-\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

になります。

ペアの部分の考え方は、偶数の場合と全く同じになります。sin については一番前と一番後ろで同じ値、cos については一番前と一番後ろで符号だけが逆になります。これは他のペアでも成り立ちますので、全ての m について sin 値、cos 値の計算をする必要は無く、各ペアの前側の m＝1 から m＝$\frac{n-1}{2}$までの sin 値、cos 値を計算すれば良いです。各ペアの後側の sin 値は前側と同値、後側の cos 値は前側の符号だけ変えれば良いです。（これは共

役根を表しています）仲間はずれの実数根、および各ペアの sin 値、cos 値から s の根を作ります。

8、伝達関数および利得の調整

こうして根を取り出すことが出来ました。取り出した根により、分母の因数分解が出来ます。

$$\alpha_m = -\sin\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

$$\beta_m = -\cos\left(\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\cosh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)$$

m＝1,2,3・・・,n

とした場合、

(1) フィルター次数 n が偶数の場合

伝達関数は、

$$G(s) = \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\{s-(\alpha_m + j\beta_m)\}\{s-(\alpha_m - j\beta_m)\}} = \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{s^2 - 2\alpha_m s + \alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}$$

となります。偶数次の利得は、角周波数 0 で通過域うねりの底の利得－A_P[dB]から出発するのです（本章 14 ページ参照）が、この伝達関数では角周波数 0 で－A_P[dB]になりません。

正しい伝達関数は、

$$G(s) = A \bullet \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}{s^2 - 2\alpha_m s + \alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}$$

となります。総乗記号内の利得を角周波数 0 で 1 にする為、各分母の定数項と同じものを、各分子にも付けます。更に総乗記号の外に定数項 A を付け、角周波数 0 での全利得を－A_P[dB]に合わせます。

通過域での許容最大減衰量を－A_P[dB]とします。その－A_P[dB]地点での、対数表示ではない生(なま)の入出力関係は、

$$-A_P = 20\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN}[dB]$$

$$\mathrm{Log}_{10}\frac{OUT}{IN} = \frac{-A_P}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN} = 10^{\frac{-A_P}{20}}$$

になります。この値が定数項 A です。$A = 10^{\frac{-A_P}{20}}$ です。

角周波数 0 が入力された時、伝達関数に j0 と－j0 が代入され、

$$\left[A \bullet \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}{s^2 - 2\alpha_m s + \alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2} \right]_{s=j0} = A \bullet \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}{\alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2} = A$$

$$\left[A \bullet \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}{s^2 - 2\alpha_m s + \alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2} \right]_{s=-j0} = A \bullet \prod_{m=1}^{\frac{n}{2}} \frac{\alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}{\alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2} = A$$

かけ合わされ、平方根が出力されますから、

$$\sqrt{A \bullet A} = A$$

となります。実際の値で計算しますと、

$$\sqrt{10^{\frac{-A_P}{20}} \bullet 10^{\frac{-A_P}{20}}} = \sqrt{10^{\frac{-A_P}{20} + \frac{-A_P}{20}}} = \sqrt{10^{\frac{-AP}{10}}} = 10^{\frac{-AP}{10} \bullet \frac{1}{2}} = 10^{\frac{-A_P}{20}}$$

になります。

(2)フィルター次数 n が奇数の場合

伝達関数は、

$$G(s) = \frac{1}{s + \sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)} \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\{s - (\alpha_m + j\beta_m)\}\{s - (\alpha_m - j\beta_m)\}}$$

$$= \frac{1}{s + \sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)} \prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{s^2 - 2\alpha_m s + \alpha_m{}^2 + \beta_m{}^2}$$

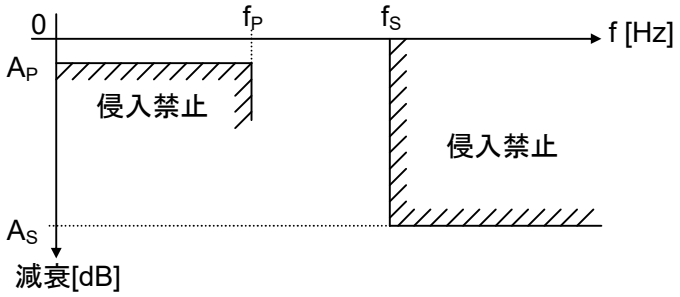
となります。この伝達関数は角周波数 0 で利得 1、つまり 0[dB]になりません。s＝jω＝0 を代入すると分りますが、分母に s と無関係な定数項がある為、角周波数 0 で利得が 1 にならないのです。フィルター次数 n が奇数の場合、正しい伝達関数は、

$$G(s)=\frac{\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)}{s+\sinh\left(\frac{1}{n}\sinh^{-1}\frac{1}{b}\right)}\bullet\prod_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\alpha_m{}^2+\beta_m{}^2}{s^2-2\alpha_m s+\alpha_m{}^2+\beta_m{}^2}$$

となります。角周波数 0 で利得を 1 にする為、各分母の定数項と同じものを、各分子にも付けます。奇数次の利得は、角周波数 0 で 0[dB]から出発するので、偶数次の時の様な全体の利得を決める定数は必要ありません。

9、チェビシェフフィルター設計ソフトの製作

チェビシェフフィルター設計ソフトを作る場合の、ユーザーとのインターフェースを考えます。ユーザーの希望するフィルターの仕様は、下図の様なものです。



0 から f_P [Hz]までの通過域における減衰の許容最大は A_P [dB]以下、阻止域である f_S [Hz]以上での減衰の許容最小は A_S [dB]。

(1) コンピューターへの入力依頼

ユーザーに、

通過域端周波数 f_P [Hz]
阻止域先端周波数 f_S [Hz]
通過域許容最大減衰量 A_P [dB]
阻止域許容最小減衰量 A_S [dB]

を入力して頂きます。コンピューター内部では、角周波数 $2\pi f$ [rad/sec]で計算することにします。チェビの設計でも、各周波数は生（なま）のものを用いないで、スケーリングを行い、正規化角周波数で表します。（スケーリングの章を参照下さい。）チェビの設計では、

$$\frac{1[\mathrm{rad/sec}]}{\text{通過域端角周波数}\ \omega_P[\mathrm{rad/sec}]}$$

を縮尺として使用します。

正規化角周波数＝生角周波数×縮尺

です。例えば、阻止域先端周波数 f_S[Hz]の正規化角周波数 ω_S は、

$$\omega_S = 2\pi f_S \bullet \frac{1}{2\pi f_P} = \frac{f_S}{f_P}[\mathrm{rad/sec}] \quad ・・・9－①$$

です。

(2) Ωs の提示

ユーザーが指定した阻止域先端周波数 f_S [Hz]を通過域端周波数 f_P [Hz]で割ったもの、

つまり、$\dfrac{\text{阻止域先端周波数 } f_S[\mathrm{Hz}]}{\text{通過域端周波数 } f_P[\mathrm{Hz}]}$ を Ω_S（ラージオメガエス）と呼びます。

この値を、参考値として表示します。フィルターの鋭さの指標です。小さいほど鋭いフィルターです。

(3) 次数の計算と提示

次数 n を求め、ユーザーに提示しなければなりません。係数 b と次数 n の求め方は以下の通りです。

チェビシェフフィルターでは通過域における減衰の許容最大値を外れるのは、正規化角周波数 1 の場所で起こります。その様に作るからです。正規化角周波数 1 の場所での減衰量は、周波数伝達関数の 2 乗つまり 2 乗 ω 特の式、

$$\frac{1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}\omega)\}^2+1}$$

の ω に 1 を代入して、

$$\frac{1}{b^2\{\cos(n\cos^{-1}1)\}^2+1} = \frac{1}{b^2(\cos 0)^2+1} = \frac{1}{b^2+1} \quad ・・・9－②$$

となります。周波数伝達関数つまり ω 特は、右辺の平方根を取り、

$$\sqrt{\frac{1}{b^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

となります。したがって通過域の許容最大減衰量、つまり dB 表示の A_P を表す式は、

$$A_P = -20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1+b^2}} = -20\log_{10}(1+b^2)^{-\frac{1}{2}} = -20\bullet -\frac{1}{2}\log_{10}(1+b^2) = 10\log_{10}(1+b^2)$$

となります。これを b について解きますと、

$$\log_{10}(1+b^2)=\frac{A_P}{10}$$

$$1+b^2=10^{\frac{A_P}{10}}$$

$$b^2=10^{\frac{A_P}{10}}-1$$

になります。b は負の値になりませんので、

$$b=\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}}-1}\quad\cdot\cdot\cdot 9-③$$

となります。一方、阻止域許容最小減衰量は阻止域先端での減衰ですので、dB 表示の A_S を表す式は、

$$A_S=-20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2+1}}$$

$$=-20\log_{10}[b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2+1]^{-\frac{1}{2}}$$

$$=-20\bullet-\frac{1}{2}\log_{10}[b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2+1]$$

$$=10\log_{10}[b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2+1]\quad\cdot\cdot\cdot 9-④$$

となります。この式を n について解きますと、

$$\log_{10}[b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2+1]=\frac{A_S}{10}$$

$$b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2+1=10^{\frac{A_S}{10}}$$

$$b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2=10^{\frac{A_S}{10}}-1$$

$$\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2=\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{b^2}$$

となります。先ほど計算したように、$b^2=10^{\frac{A_P}{10}}-1$ ですので、代入しますと、

$$\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 = \frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}$$

$$\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S) = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

$$n\cosh^{-1}\omega_S = \cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

$$n = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}}{\cosh^{-1}\omega_S}$$

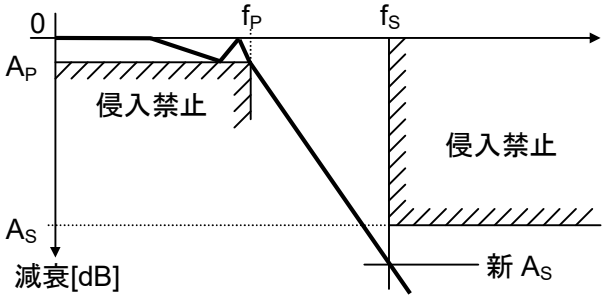
になります。n が求まりました。n は小数で出ますが、小数の次数は作れないので、切り上げて整数にします。

小数の n および、整数に切り上げた n の値を画面に表示します。n を整数に切り上げることにより、ユーザー仕様に影響を与えます。以下の様に提示して、ユーザーの判断を仰ぎます。

(4) 新 A_S の提示

9－②式から分る様に、ω_P での減衰量は n に無関係です。b のみで決まる量です。n が整数に切り上げられて変わるのは、ω_S までの減衰の傾斜です。傾斜は必ず大きくなります。

整数に切り上げた n では、ユーザーの指定した f_S[Hz]での減衰量は、ユーザーの指定した A_S [dB]より必ず大きくなります。つまり、f_S[Hz]より低い周波数で A_S [dB]になります。



したがって、切り上げられた n を使用した場合の、ユーザーの指定した f_S [Hz]での減衰量を、「A_P、f_S、Ωs が仕様通りなら、A_S は大きくなります。」として提示する必要がありま

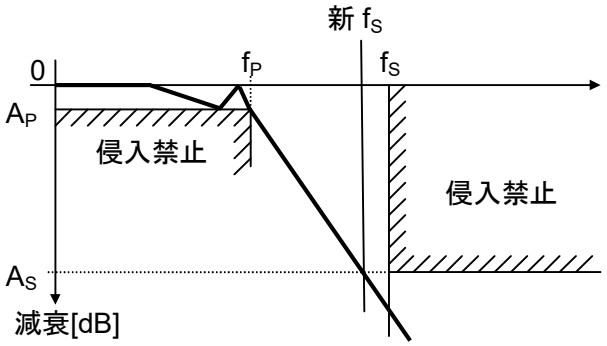
す。その値は、9－④式に、9－③式の b の値と、整数の n と、9－①式の ω_S を代入することにより求めます。9－④式を再掲しますと、

$$A_S = 10\log_{10}[b^2\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 + 1]$$

です。

(5) 新 f_S および新 Ωs の提示

(4)にも書きました通り、整数の n を採用しますと、ユーザー指定 f_S [Hz]は、ユーザー指定 f_P [Hz]に接近します。整数の n で、ユーザー仕様と同じ A_P、As を使用する場合、必ず小さくなる新 f_S および新 Ωs の値を提示します。



通過域許容最大減衰量 A_P[dB]と、阻止域許容最小減衰量 A_S[dB]を、ユーザー仕様と同じにして、整数の n での ω_s の値を求めます。9－④式に 9－③式の b を代入し変形すれば、

$$A_S = 10\log_{10}[(10^{\frac{A_P}{10}} - 1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 + 1]$$

$$\frac{A_S}{10} = \log_{10}[(10^{\frac{A_P}{10}} - 1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 + 1]$$

$$10^{\frac{A_S}{10}} = (10^{\frac{A_P}{10}} - 1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 + 1$$

$$10^{\frac{A_S}{10}} - 1 = (10^{\frac{A_P}{10}} - 1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2$$

$$\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 = \frac{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}$$

$$\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S) = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}}$$

$$n\cosh^{-1}\omega_S = \cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}$$

$$\cosh^{-1}\omega_S = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}}{n}$$

$$\omega_S = \cosh\frac{\cosh^{-1}\sqrt{\frac{10^{\frac{A_S}{10}}-1}{10^{\frac{A_P}{10}}-1}}}{n}$$

となり、正しい ω_s の値を求めることが出来ます。新 f_S は、

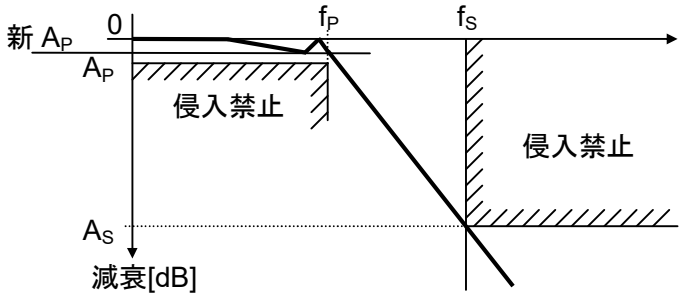
$$f_S = \frac{\omega_S}{2\pi}$$

になります。9－①式で、$\omega_S = \frac{f_S}{f_P}$ であることが分っています。したがって、ω_s は新 Ω_s になります。「A_P、A_S が仕様通りなら、f_S、Ωs は小さくなります。」としてこの値を提示します。

(6) 新 A_P の提示

整数の n を採用しますと減衰の傾斜はきつくなり、阻止域先端角周波数 ω_S での減衰量は小数の n の場合より大きくなります。

ω_S における減衰量をユーザー仕様通りに抑えるためには、下図の様に通過域許容最大減衰量 A_P を小さくして、傾斜部分を持ち上げる必要があります。



新しい通過域許容最大減衰値 A_P の値を求めるには、9－④式を以下のように変形します。

$$A_S = 10\log_{10}[(10^{\frac{A_P}{10}}-1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2+1]$$

$$\frac{A_S}{10} = \log_{10}[(10^{\frac{A_P}{10}} - 1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 + 1]$$

$$10^{\frac{A_S}{10}} = (10^{\frac{A_P}{10}} - 1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2 + 1$$

$$10^{\frac{A_S}{10}} - 1 = (10^{\frac{A_P}{10}} - 1)\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2$$

$$10^{\frac{A_P}{10}} - 1 = \frac{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}{\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2}$$

$$10^{\frac{A_P}{10}} = \frac{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}{\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2} + 1$$

$$\frac{A_P}{10} = \log_{10}\left[\frac{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}{\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2} + 1\right]$$

$$A_P = 10\log_{10}\left[\frac{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}{\{\cosh(n\cosh^{-1}\omega_S)\}^2} + 1\right]$$

上式に整数の n、ユーザー仕様の A_S を代入し、新 A_P を求めます。これが阻止域許容最小減衰量 A_S と阻止域先端周波数 f_S を、ユーザー仕様通りに抑えるための通過域許容最大減衰量 A_P です。

「A_S、f_S、Ω_S が仕様通りなら、A_P は小さくなります。」としてこの A_P を提示します。この時 b の値も次のように変わります。

$$新b = \sqrt{10^{\frac{新A_P}{10}} - 1}$$

です。

10、フィルターの設計その 2(具体設計)

ユーザーとのやり取りで仕様が固まりましたら、正しい n と b で因数分解を行い、正規化角周波数 ω_P＝1 [rad/sec]で 1 次や 2 次の伝達関数を作成します。

伝達関数を実現する回路を決め、正規化角周波数 ω_P＝1 [rad/sec]での回路素子値を求めます。

実周波数への縮尺を求め、回路素子値の実周波数へのスケーリング、および回路素子値

の実用値へのスケーリングを行います。

11、三角関数で計算しても、双曲線関数で計算しても全く同じ結果になる訳

3－①式で n＝3、b＝1 にした、$y = \cos(3\cos^{-1}x)$ についてです。

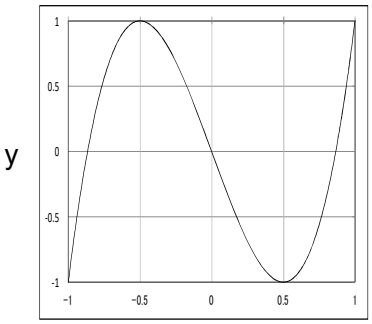
－1≦x≦＋1 の範囲で、x から y への様子を表 1 にして見ますと、

表 1

x	－1	－0.866	－0.5	0	0.5	0.866	1
$\cos^{-1}x$	$\pm\pi$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{6}$	0
$3\cos^{-1}x$	$\pm3\pi$	$\pm\frac{5\pi}{2}$	$\pm2\pi$	$\pm\frac{3\pi}{2}$	$\pm\pi$	$\pm\frac{\pi}{2}$	0
$y = \cos(3\cos^{-1}x)$	－1	0	1	0	－1	0	1

になります。表中 $\cos^{-1}x$ は無限多価の関数ですが、±π の範囲で考えました。

表 1 の x と y の関係をグラフにしますと、



になります。－1≦x≦＋1 で、－1≦y≦＋1 の波状になっています。実際は b が掛かりますので、もっと小さな波になります。

次に 3－②式で n＝3、b＝1 にした、$y = \cosh(3\cosh^{-1}x)$ についてです。

x≦－1 および 1≦x の範囲で、x から y への様子を表 2 にして見ますと、

表 2

x	－3	－2	－1	1	2	3
$\cosh^{-1}x$	$\pm1.763\pm j\pi$	$\pm1.317\pm j\pi$	$\pm j\pi$	0	±1.317	±1.763
$3\cosh^{-1}x$	$\pm5.289\pm j3\pi$	$\pm3.951\pm j3\pi$	$\pm j3\pi$	0	±3.951	±5.289
$y = \cosh(3\cosh^{-1}x)$	－99	－26	－1	1	26	99

になります。

変数が実数の場合、cosh の値は常に 1 以上です。下の実数変数の cosh のグラフをご覧下さい。表 2 右側の x が＋1 以上の時、

$\cosh \pm 1.763 = 3$ ですので、cosh の値を 3 にする変数、$\cosh^{-1}3$ は ± 1.763 です。

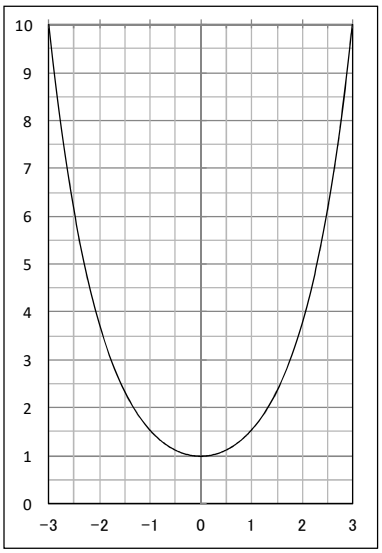
$\cosh \pm 1.317 = 2$ ですので、cosh の値を 2 にする変数、$\cosh^{-1}2$ は ± 1.317 です。

$\cosh 0 = 1$ ですので、cosh の値を 0 にする変数、$\cosh^{-1}1$ は 0 です。

上記の様に x が 1 より大きい場合、$\cosh^{-1}x$ の答はプラスの実数値とマイナスの実数値を持つ 2 価の関数です。

ところが、cosh の値を 1 より小さくする変数は、実数の範囲にはありません。

表 2 左側の x が－1 以下の場合、$\cosh^{-1}x$ の答は、実数ではなく複素数になります。



cosh のグラフ
（下の目盛が実数の変数）

複素数変数の cosh 加法定理は、

$$\cosh(x \pm jy) = \cosh x \cos y \pm j \sinh x \sin y$$

です。

$$\begin{aligned}\cosh(0 \pm j\pi) &= \cosh 0 \cos \pi \pm j \sinh 0 \sin \pi \\ &= -1 \pm j0 \\ &= -1\end{aligned}$$

ですので、cosh の値を－1 にする変数、$\cosh^{-1}(-1)$ は $\pm j\pi$ です。

$$\begin{aligned}\cosh(\pm 1.317 \pm j\pi) &= \cosh(\pm 1.317) \cos \pi \pm j \sinh(\pm 1.317) \sin \pi \\ &= 2 \cdot (-1) \pm j0 \\ &= -2\end{aligned}$$

ですので、cosh の値を－2 にする変数、$\cosh^{-1}(-2)$ は $\pm 1.317 \pm j\pi$ です。

$$\begin{aligned}\cosh(\pm 1.763 \pm j\pi) &= \cosh(\pm 1.763) \cos \pi \pm j \sinh(\pm 1.763) \sin \pi \\ &= 3 \cdot (-1) \pm j0 \\ &= -3\end{aligned}$$

ですので、cosh の値を－3 にする変数、$\cosh^{-1}(-3)$ は $\pm 1.763 \pm j\pi$ です。

こうして表 2 が完成しました。表 2 の左側、x≦－1 の範囲では、実数の変数だけでは表が埋まらず、複素数の変数を使わなければならないことが分りました。

x が－1 より小さい時、または x が 1 より大きい時、y は急激に減少または増加していることも分ります。

全面的に複素数の変数を解禁すれば、表 1 の－1≦x≦1 の cos で表された範囲でも、cosh を使う事が出来ます。表 3 です

表 3

x	－1	－0.866	－0.5	0	0.5	0.866	1
$\cosh^{-1}x$	$\pm j\pi$	$\pm j\frac{5\pi}{6}$	$\pm j\frac{2\pi}{3}$	$\pm j\frac{\pi}{2}$	$\pm j\frac{\pi}{3}$	$\pm j\frac{\pi}{6}$	0
$3\cosh^{-1}x$	$\pm j3\pi$	$\pm j\frac{5\pi}{2}$	$\pm j2\pi$	$\pm j\frac{3\pi}{2}$	$\pm j\pi$	$\pm j\frac{\pi}{2}$	0
$\cosh(3\cosh^{-1}x)$	－1	0	1	0	－1	0	1

表 3 の説明を行います。表の右端の x＝1 では、

$$\cosh 0 = 1$$

ですので、cosh の値を 1 にする変数、$\cosh^{-1}1$は 0 になります。

次の x＝0.866 ですが、cosh の値を 1 よりも小さくする変数は、複素数になります。複素数変数の cosh は、$\cosh(x \pm jy) = \cosh x \cos y \pm j \sinh x \sin y$ です。

$$\begin{aligned}\cosh\left(0 \pm j\frac{\pi}{6}\pi\right) &= \cosh 0 \cos\frac{\pi}{6} \pm j \sinh 0 \sin\frac{\pi}{6} \\ &= 0.866 \pm j0 \\ &= 0.866\end{aligned}$$

ですので、cosh の値を 0.886 にする変数、$\cosh^{-1}0.866$ は$\pm j\frac{\pi}{6}$になります。

$$\begin{aligned}\cosh\left(0 \pm j\frac{\pi}{3}\right) &= \cosh 0 \cos\frac{\pi}{3} \pm j \sinh 0 \sin\frac{\pi}{3} \\ &= 0.5 \pm j0 \\ &= 0.5\end{aligned}$$

ですので、cosh の値を 0.5 にする変数、$\cosh^{-1}0.5$ は$\pm j\frac{\pi}{3}$になります。

$$\begin{aligned}\cosh\left(0 \pm j\frac{\pi}{2}\right) &= \cosh 0 \cos\frac{\pi}{2} \pm j \sinh 0 \sin\frac{\pi}{2} \\ &= 0 \pm j0 \\ &= 0\end{aligned}$$

ですので、cosh の値を 0 にする変数、$\cosh^{-1}0$ は$\pm j\frac{\pi}{2}$になります。

$$\cosh\left(0 \pm j\frac{2\pi}{3}\right) = \cosh 0 \cos\frac{2\pi}{3} \pm j \sinh 0 \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$= -0.5 \pm j0$$
$$= -0.5$$

ですので、cosh の値を－0.5 にする変数、$\cosh^{-1}(-0.5)$ は $\pm j\frac{2\pi}{3}$ になります。

$$\cosh\left(0 \pm j\frac{5\pi}{6}\right) = \cosh 0 \cos\frac{5\pi}{6} \pm j\sinh 0 \sin\frac{5\pi}{6}$$
$$= -0.866 \pm j0$$
$$= -0.866$$

ですので、cosh の値を－0.866 にする変数、$\cosh^{-1}(-0.866)$ は $\pm j\frac{5\pi}{6}$ になります。

$$\cosh(0 \pm j\pi) = \cosh 0 \cos\pi \pm j\sinh 0 \sin\pi$$
$$= -1 \pm j0$$
$$= -1$$

ですので、cosh の値を－1 にする変数、$\cosh^{-1}(-1)$ は $\pm j\pi$ になります。

表 3 の最後の行の計算です。表の右端は、

$$\cosh 0 = 1$$

です。引き続き、$\cosh(x \pm jy) = \cosh x \cos y \pm j\sinh x \sin y$ に複素数の変数 $3\cosh^{-1}x$ を代入し、

$$\cosh\left(0 \pm j\frac{\pi}{2}\right) = \cosh 0 \cos\frac{\pi}{2} \pm j\sinh 0 \sin\frac{\pi}{2}$$
$$= 0 \pm j0$$
$$= 0$$
$$\cosh(0 \pm j\pi) = \cosh 0 \cos\pi \pm j\sinh 0 \sin\pi$$
$$= -1 \pm j0$$
$$= -1$$
$$\cosh\left(0 \pm j\frac{3\pi}{2}\right) = \cosh 0 \cos\frac{3\pi}{2} \pm j\sinh 0 \sin\frac{3\pi}{2}$$
$$= 0 \pm j0$$
$$= 0$$
$$\cosh(0 \pm j2\pi) = \cosh 0 \cos 2\pi \pm j\sinh 0 \sin 2\pi$$
$$= 1 \pm j0$$
$$= 1$$
$$\cosh\left(0 \pm j\frac{5\pi}{2}\right) = \cosh 0 \cos\frac{5\pi}{2} \pm j\sinh 0 \sin\frac{5\pi}{2}$$
$$= 0 \pm j0$$

$$= 0$$

$$\cosh(0 \pm j3\pi) = \cosh 0 \cos 3\pi \pm j \sinh 0 \sin 3\pi$$

$$= -1 \pm j0$$

$$= -1$$

となります。

表 1 の $\cos^{-1}0.866$ は $\pm\frac{\pi}{6}$ でした。$\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$ は 0.866 です。

表 3 の $\cosh^{-1}0.866$ は $\pm j\frac{\pi}{6}$ でした。$\cosh\left(\pm j\frac{\pi}{6}\right)$ は 0.866 です。

表 1 の $\cos^{-1}0.5$ は $\pm\frac{\pi}{3}$ でした。$\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)$ は 0.5 です。

表 3 の $\cosh^{-1}0.5$ は $\pm j\frac{\pi}{3}$ でした。$\cosh\left(\pm j\frac{\pi}{3}\right)$ は 0.5 です。

表 1 の $\cos^{-1}0$ は $\pm\frac{\pi}{2}$ でした。$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ は 0 です。

表 3 の $\cosh^{-1}0$ は $\pm j\frac{\pi}{2}$ でした。$\cosh\left(\pm j\frac{\pi}{2}\right)$ は 0 です。

表 1 の $\cos^{-1}(-0.5)$ は $\pm\frac{2\pi}{3}$ でした。$\cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)$ は－0.5 です。

表 3 の $\cosh^{-1}(-0.5)$ は $\pm j\frac{2\pi}{3}$ でした。$\cosh\left(\pm j\frac{2\pi}{3}\right)$ は－0.5 です。

表 1 の $\cos^{-1}(-0.866)$ は $\pm\frac{5\pi}{6}$ でした。$\cos\left(\pm\frac{5\pi}{6}\right)$ は－0.866 です。

表 3 の $\cosh^{-1}(-0.866)$ は $\pm j\frac{5\pi}{6}$ でした。$\cosh\left(\pm j\frac{5\pi}{6}\right)$ は－0.866 です。

表 1 の $\cos^{-1}(-1)$ は $\pm\pi$ でした。$\cos(\pm\pi)$ は－1 です。

表 3 の $\cosh^{-1}(-1)$ は $\pm j\pi$ でした。$\cosh(\pm j\pi)$ は－1 です。

表 1 と表 3 の比較から分ることは、複素数 z が同じ時、$\cosh jz = \cos z$ であることです。$\cosh z$ の定義、

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

において z=jz ならば、

$$\cosh jz = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

となります。この式は、

$$= \cos z$$

を表しています。具体的には z＝x＋jy ならば、

$$\begin{aligned}
\cosh j(x+jy) &= \cosh(-y+jx) \\
&= \frac{e^{-y+jx}+e^{-(-y+jx)}}{2} \\
&= \frac{e^{-y+jx}+e^{y-jx}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}\cdot e^{jx}+e^{y}\cdot e^{-jx}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(\cos x+j\sin x)+e^{y}(\cos x-j\sin x)}{2} \\
&= \frac{e^{-y}\cos x+e^{-y}j\sin x+e^{y}\cos x-e^{y}j\sin x}{2} \\
&= \frac{\cos x(e^{y}+e^{-y})-j\sin x(e^{y}-e^{-y})}{2} \\
&= \frac{\cos x(e^{y}+e^{-y})}{2}-\frac{j\sin x(e^{y}-e^{-y})}{2} \\
&= \cos x\cdot\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}-j\sin x\cdot\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \\
&= \cos x\cosh y-j\sin x\sinh y
\end{aligned}$$

となります。$\cosh j(x+jy)$ の結果は、6－③式の $\cos(x+jy)$ と同じです。

$\cosh j(x+jy)=\cos(x+jy)$ です。 $\cosh\left(\pm j\frac{\pi}{6}\right)=\cosh j\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$ となります。複素数の変数を使うことにより、cos の全ての値を cosh で表わせます。

同様に全面的に複素数の変数を解禁すれば、表 2 の x≦－1 および 1≦x の cosh で表された範囲でも、cos を使う事が出来ます。表 4 です。

表 4

x	－3	－2	－1	1	2	3
$\cos^{-1}x$	±π±j1.763	±π±j1.317	±π	0	±j1.317	±j1.763
$3\cos^{-1}x$	±3π±j5.289	±3π±j3.951	±3π	0	±j3.951	±j5.289
$\cos(3\cos^{-1}x)$	－99	－26	－1	1	26	99

表 4 の説明を行います。

複素数変数の cos は、

$$\cos(x \pm jy) = \cos x \cosh y \mp j \sin x \sinh y$$

です。表の右端から、

$$\begin{aligned}\cos(0 \pm j1.763) &= \cos 0 \cosh 1.763 \mp j \sin 0 \sinh 1.763 \\ &= 3 \mp j0 \\ &= 3\end{aligned}$$

ですので、cos の値を 3 にする変数、$\cos^{-1}3$ は±j1.763 になります。

$$\begin{aligned}\cos(0 \pm j1.317) &= \cos 0 \cosh 1.317 \mp j \sin 0 \sinh 1.317 \\ &= 2 \mp j0 \\ &= 2\end{aligned}$$

ですので、cos の値を 2 にする変数、$\cos^{-1}2$ は±j1.317 になります。

$$\cos 0 = 1$$

ですので、cos の値を 1 にする変数、$\cos^{-1}1$は 0 になります。

$$\cos \pm \pi = -1$$

ですので、cos の値を−1 にする変数、$\cos^{-1}(-1)$は$\pm\pi$になります。

$$\begin{aligned}\cos(\pm\pi \pm j1.317) &= \cos(\pm\pi)\cosh 1.317 \mp j \sin(\pm\pi)\sinh 1.317 \\ &= (-1)\cdot 2 \mp j0 \\ &= -2\end{aligned}$$

ですので、cos の値を −2 にする変数、$\cos^{-1}(-2)$ は$\pm\pi\pm$j1.317 になります。

$$\begin{aligned}\cos(\pm\pi \pm j1.763) &= \cos(\pm\pi)\cosh 1.763 \mp j \sin(\pm\pi)\sinh 1.763 \\ &= (-1)\cdot 3 \mp j0 \\ &= -3\end{aligned}$$

ですので cos の値を −3 にする変数、$\cos^{-1}(-3)$ は$\pm\pi\pm$j1.763 になります。

表 4 の最後の行の計算は、

$$\cos(x \pm jy) = \cos x \cosh y \mp j \sin x \sinh y$$

に、表の右側から各複素数変数$3\cos^{-1}x$ を代入し、

$$\begin{aligned}\cos(0 \pm j5.289) &= \cos 0 \cosh 5.289 \mp j \sin 0 \sinh 5.289 \\ &= 99 \pm j0 \\ &= 99\end{aligned}$$

$$\cos(0 \pm j3.951) = \cos 0 \cosh 3.951 \mp j \sin 0 \sinh 3.951$$
$$= 26 \mp j0$$
$$= 26$$
$$\cos 0 = 1$$

$$\cos(\pm 3\pi) = -1$$

$$\cos(\pm 3\pi \pm j3.951) = \cos(\pm 3\pi)\cosh 3.951 \mp j \sin(\pm 3\pi)\sinh 3.951$$
$$= (-1)\cdot 26 \mp j0$$
$$= -26$$
$$\cos(\pm 3\pi \pm j5.289) = \cos(\pm 3\pi)\cosh 5.289 \mp j \sin(\pm 3\pi)\sinh 5.289$$
$$= (-1)\cdot 99 \mp j0$$
$$= -99$$

です。

表 2 の $\cosh^{-1}3$ は ± 1.763 でした。$\cosh(\pm 1.763)$ は 3 です。
表 4 の $\cos^{-1}3$ は $\pm j1.763$ でした。$\cos(\pm j1.763)$ は 3 です。
表 2 の $\cosh^{-1}2$ は ± 1.317 でした。$\cosh(\pm 1.317)$ は 2 です。
表 4 の $\cos^{-1}2$ は $\pm j1.317$ でした。$\cos(\pm j1.317)$ は 2 です。
表 2 の $\cosh^{-1}1$ は 0 でした。$\cosh 0$ は 1 です。
表 4 の $\cos^{-1}1$ は 0 でした。$\cos 0$ は 1 です。
表 2 の $\cosh^{-1}(-1)$ は $\pm j\pi$ でした。$\cosh(\pm j\pi)$ は－1 です。
表 4 の $\cos^{-1}(-1)$ は $\pm\pi$ でした。$\cos(\pm\pi)$ は－1 です。
表 2 の $\cosh^{-1}(-2)$ は $\pm 1.317 \pm j\pi$ でした。$\cosh(\pm 1.317 \pm j\pi)$ は－2 です。
表 4 の $\cos^{-1}(-2)$ は $\pm\pi \pm j1.317$ でした。$\cos(\pm\pi \pm j1.317)$ は－2 です。
表 2 の $\cosh^{-1}(-3)$ は $\pm 1.763 \pm j\pi$ でした。$\cosh(\pm 1.763 \pm j\pi)$ は－3 です。
表 4 の $\cos^{-1}(-3)$ は $\pm\pi \pm j1.763$ でした。$\cos(\pm\pi \pm j1.763)$ は－3 です。

表 2 と表 4 の比較から分ることは、z を複素数として、$\cos jz = \cosh z$ であることです。
$\cos z$ の定義、

$$\cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$$

において z=jz ならば、

$$\cos jz = \frac{e^{j\cdot jz} + e^{-j\cdot jz}}{2}$$

となります。これは、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} \\
&= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\
&= \cosh z
\end{aligned}
$$

を表しています。具体的には z＝x＋jy ならば、

$$
\begin{aligned}
\cos j(x+jy) &= \cos(-y+jx) \\
&= \frac{e^{j(-y+jx)}+e^{-j(-y+jx)}}{2} \\
&= \frac{e^{-x-jy}+e^{x+jy}}{2} \\
&= \frac{e^{-x}\cdot e^{-jy}+e^{x}\cdot e^{jy}}{2} \\
&= \frac{e^{-x}(\cos y - j\sin y)+e^{x}(\cos y + j\sin y)}{2} \\
&= \frac{e^{-x}\cos y - e^{-x}j\sin y + e^{x}\cos y + e^{x}j\sin y}{2} \\
&= \frac{\cos y(e^{x}+e^{-x})+j\sin y(e^{x}-e^{-x})}{2} \\
&= \frac{\cos y(e^{x}+e^{-x})}{2}+\frac{j\sin y(e^{x}-e^{-x})}{2} \\
&= \cos y\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}+j\sin y\cdot\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \\
&= \cos y\cosh x + j\sin y\sinh x \\
&= \cosh x\cos y + j\sinh x\sin y
\end{aligned}
$$

となり、6－⑤式の $\cosh(x+jy)$ と同じ結果になります。$\cos j(x+jy)=\cosh(x+jy)$ です。

複素数の変数を使うことにより、cosh の全ての値を cos で表せます。

複素数の変数を使用すれば、cos の値が－1 よりも小さく、また＋1 よりも大きく出来ます。複素数の変数を使用すれば、cosh の値が 1 よりも小さく出来ます。変数を複素数に広げれば、cos で表される全ての値を cosh で表すことが出来、cosh で表される全ての値を cos で表すことが出来ます。cos と cosh の境界が無くなります。

目次へ戻る