ヤコビの楕円関数　　2008 年 6 月 19 日　　目次へ戻る

章の目次

1、本章の目的・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・1
2、楕円積分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・1
3、完全楕円積分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2
4、楕円関数
(1)sin 関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・2
(2)tanh 関数 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・4
(3)楕円関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・6
5、楕円関数の微分
(1)sn 関数の微分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・8
(2)cn 関数の微分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・9
(3)dn 関数の微分・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・9
6、実数変数における加法定理 ・・・・・・・・・・・・・・・・10
(1)sn 関数の加法定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・10
(2)sn 関数の加法定理の検証・・・・・・・・・・・・・・・・12
(3)cn 関数の加法定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・16
(4)dn 関数の加法定理・・・・・・・・・・・・・・・・・・・17
(5)倍数公式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・18
(6)半数公式 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・19
7、変域を実数全域に広げる・・・・・・・・・・・・・・・・・23
(1)u＋K の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・24
(2) u＋2K の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・26
(3) u＋3K の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・27
(4) u＋4K の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・29
8、純虚数変数の楕円関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・31
(1)tn 関数について・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・31
(2)sn 関数の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・34
(3)cn 関数の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・37
(4)dn 関数の場合 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・37
9、複素数変数の楕円関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・38
10、複素平面上の sn 関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・40
11、sn 関数による写像 ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・45
12、2 重周期関数・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・46
注、定積分の性質・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・47

1、本章の目的

本章では今後必要とされる「ヤコビの楕円関数」の簡単な説明を行います。まず実数変数で考え、次に純虚数変数、最後に複素数変数の楕円関数を考えます。

2、楕円積分

p(x)が x の 3 次多項式あるいは 4 次多項式の場合、積分$\int \frac{1}{\sqrt{p(x)}}dx$を有理関数、無理関数、指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数などを使って表すことは出来ません。この積分を、第 1 種楕円積分と呼びます。

楕円積分には標準形があります。第 1 種楕円積分の標準形は、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \cdots 2-①$$

です。（本章最後の注参照）k（スモールケー）は楕円積分の母数と呼ばれています。

x を sinφ で置換しても良いです。この場合、x＝sin φ の両辺を φ で微分して、

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{d\sin\varphi}{d\varphi}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos\varphi$$

$$dx = \cos\varphi d\varphi$$

とします。この時、x＝sin φ の両辺を x で微分しても良いです。

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d\sin\varphi}{dx}$$

$$1 = \frac{d\sin\varphi}{dx}$$

となりますが、この式の右辺$\frac{d\sin\varphi}{dx}$を$\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\bullet\frac{d\varphi}{dx}$と合成関数の微分風に置き、微分出来る所を微分すれば、

$$1 = \frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\bullet\frac{d\varphi}{dx}$$

$$1 = \cos\varphi\bullet\frac{d\varphi}{dx}$$

$$dx = \cos\varphi d\varphi$$

となり、両辺を φ で微分した時と同じ結果になります。

積分範囲は、定積分の置換積分ですから、積分下端の 0 は、0＝sin φ を解き φ＝0 です。

積分上端の x は、x＝sin φ を解き φ＝sin^{-1}x です。したがって、x を sin φ で置換した場合、

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{(1-\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)}} = \int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \cdots 2-②$$

積分上端 φ＝sin^{-1}x

となります。（本章最後の注参照）他の標準形をとる場合もあるので、x を sin φ で置換しても、しなくても 2－①、2－②式をルジャンドルーヤコビの標準形と呼びます。

p(x)が x の 3 次多項式でも 4 次多項式でも、積分 $\int \frac{1}{\sqrt{p(x)}} dx$ が、第 1 種楕円積分のルジャンドルーヤコビ標準形に変形出来ると言われています。

3、完全楕円積分

x＝1 あるいは sin φ＝1、つまり $\varphi = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$ までの定積分、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = K = K(k)$$

を K（ラージケー）で表します。母数 k を明示する場合は K(k)と書きます。この K または K(k)を第 1 種**完全**楕円積分と呼んでいます。

4、楕円関数

(1)sin 関数

楕円積分はひとまず置いておき、三角関数 sin の逆関数 $u = \sin^{-1}x$ （アークサインエックス）のグラフを考えます。－1≦x≦1 において、各 x に対応する u の値は無限にあります。

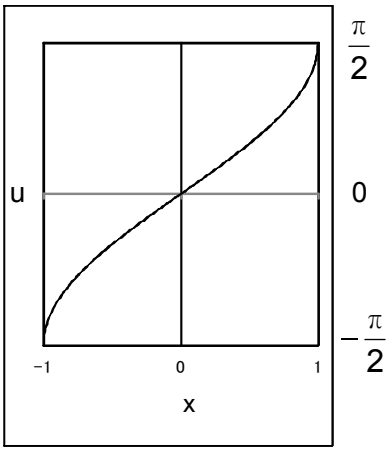
たとえば x＝0 の場合、u＝0,±π,±2π・・・・になり、1 つに決まりません。

このような関数を無限多価関数と呼びます。

一方、－1≦x≦1 において $-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$ という制限をつけますと、u の値は 1 つに決ま

り 1 価関数になります。このように定めた範囲を、関数の主値と呼びます。

主値をとれば、$x=0$ のとき $u=0$、$x=\pm\frac{1}{2}$ のとき $u=\pm\frac{\pi}{6}$、$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $u=\pm\frac{\pi}{4}$、$x=\pm1$ のとき $u=\pm\frac{\pi}{2}$ となります。



$u=\sin^{-1}x$ の主値グラフ

突然ですが、$u=\sin^{-1}x$ を積分の形で表す為に、まず $u=\sin^{-1}x$ を微分します。

$u=\sin^{-1}x$ の $\frac{du}{dx}$ を求める場合、$u=\sin^{-1}x$ を逆に書き直し、$\sin u=x$ から $\frac{du}{dx}$ を求めるのが普通です。

$\sin u=x$ の両辺を x で微分すれば、

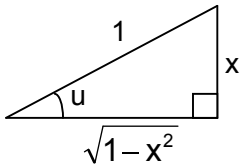
$$\frac{d\sin u}{du}\frac{du}{dx}=\frac{dx}{dx}$$

$$\cos u\frac{du}{dx}=1$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos u}$$

となります。ここで右図を見れば、$\sin u=x$ のとき $\cos u=\sqrt{1-x^2}$ です。したがって、

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{\cos u}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



となります。これが $u=\sin^{-1}x$ を微分したものです。

この式が与えられたとき、ここからふたたび u を求めるには、この微分方程式を、$\sin^{-1}$ の初期条件 $x_0=0$、$u_0=0$ で解けば良いです。まず変数分離しますと、

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

になります。初期条件のもとで積分して、（下端と上端が出る理由は 3 次連立チェビシェフの章の最後を参照して下さい）

$$\int_0^u du = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

となります。u は $\sin^{-1}x$ ですから、これが $\sin^{-1}x$ を積分で表したものです。第 1 種楕円積分標準形 2ー①式の k を 0 にしたものになります。

u は積分上端 x の関数として与えられ、（本章最後の注参照）

$$u = \left[\sin^{-1}x\right]_0^x = \sin^{-1}x$$

となります。逆にすれば、

$$\sin u = x$$

になります。

(2)tanh 関数

再び突然ですが、双曲線関数 tanh の逆関数を、$u = \tanh^{-1}x$ と置きますと、

$$x = \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \bullet \frac{2}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$$

です。上式の右辺と左辺から、

$$e^u - e^{-u} = x(e^u + e^{-u})$$
$$e^u - e^{-u} = xe^u + xe^{-u}$$
$$e^u - xe^u = e^{-u} + xe^{-u}$$
$$e^u(1-x) = e^{-u}(1+x)$$
$$\frac{e^u}{e^{-u}} = \frac{1+x}{1-x}$$

となります。左辺の分子分母に e^u を掛け、

$$\frac{e^u e^u}{e^{-u}e^u} = \frac{1+x}{1-x}$$
$$\frac{e^{u+u}}{e^{-u+u}} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$e^{2u} = \frac{1+x}{1-x}$$

になります。両辺の対数をとりますと、

$$\log_e e^{2u} = \log_e \frac{1+x}{1-x}$$

$$2u = \log_e \frac{1+x}{1-x}$$

$$u = \frac{1}{2}\log_e \frac{1+x}{1-x}$$

になります。ここで u の微分を行います。$\frac{1+x}{1-x} = y$ と置きますと、

$$u = \frac{1}{2}\log_e y$$

になります。合成関数の微分法により、

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\log_e y \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{y}\bullet\frac{(1+x)'(1-x)-(1+x)(1-x)'}{(1-x)^2}$$

となります。y をもとに戻して、

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1-x}{1+x}\bullet\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1-x}{1+x}\bullet\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1+x}\bullet\frac{2}{1-x}$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

になります。これが $u = \tanh^{-1} x$ を微分したものです。もう一度、結果だけ書きますと、

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$$

です。この式が与えられたとき、ここからふたたび u を求めるには、この微分方程式を、$\tanh^{-1}$の初期条件 $x_0 = 0$、$u_0 = 0$ で解けば良いです。まず変数分離を行い、

$$du = \frac{1}{1-x^2}dx$$

です。初期条件のもとで積分しますと、

$$\int_0^u du = \int_0^x \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

$$u = \int_0^x \frac{1}{1-x^2}\,dx$$

です。u は $\tanh^{-1} x$ ですから、これが $\tanh^{-1} x$ を積分で表したものです。第 1 種楕円積分標準形 2－①式の k を 1 にしたものになります。

u は積分上端 x の関数として与えられ、（本章最後の注参照）

$$u = \left[\tanh^{-1} x\right]_0^x = \tanh^{-1} x$$

となります。逆にすれば、

$$\tanh u = x$$

になります。

第 1 種楕円積分標準形の k を、特に k＝0 または k＝1 にした場合、積分の表す関数は $\sin^{-1} x$ または $\tanh^{-1} x$ になります。

(3)楕円関数

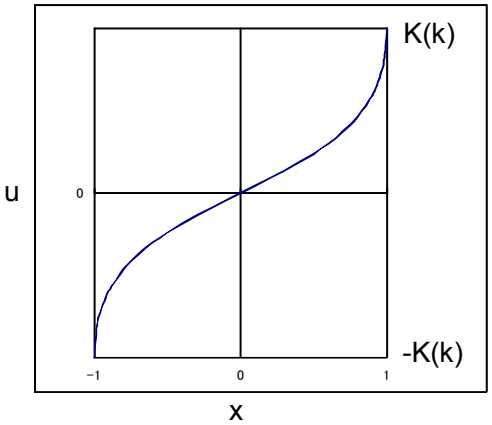
上記方法に習い、表すことが出来ない第 1 種楕円積分を、積分上端 x の関数として無理矢理 sn^{-1}（アークエスエヌ）と定義します。

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left[sn^{-1}x\right]_0^x = sn^{-1}x \quad \cdots 4-①$$

母数は k なので、

$$u = sn^{-1}(x,k)$$

と書きます。母数 k は実数で 0＜k＜1 とします。－1＜x＜1 のグラフを描きますと、



$u = sn^{-1}x$ の主値グラフ

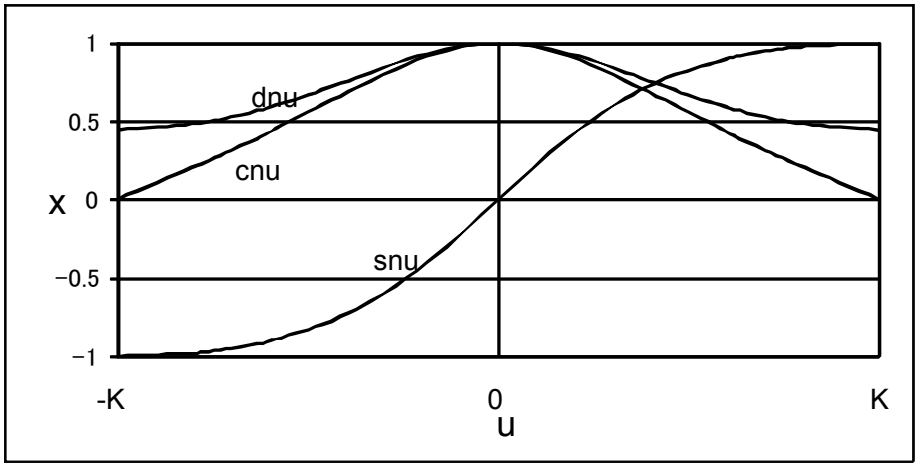
になります。積分上端の x がマイナスの時、$sn^{-1}(x,k)$もマイナスになります。シンプソンの公式などを用い、数値積分で 4－①式の定積分を求めると分ります。

$u = sn^{-1}x$ を逆に書き直せば、

$$x = snu = sn(u,k)$$

となります。これがヤコビの楕円関数のひとつ、sn（エスエヌ）関数の定義です。第 1 種楕円積分の逆関数として sn 関数を定義します。

下のグラフはシンプソンの公式を使い、－1≦ x≦ 1に対する2－②式の積分値 u を求め、u を横軸、x を縦軸として snu をグラフ化したものです。cnu、dnu については後述します。

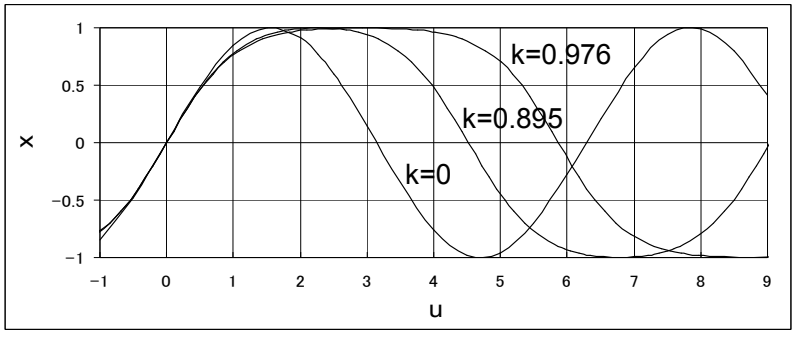


sn u は、x が－1≦x≦1 と変化するとき－K(k)≦u≦＋K(k)の範囲で定義されるだけです。sn(－K)＝－1、sn0＝0、snK＝1 等です。しかし、これを u についての無限多価関数として、三角関数同様、－∞＜u＜＋∞で定義し直します。つまり、－∞K(k)＜u＜＋∞K(k)で定義します。この章の 7、をご覧下さい。

sn(u,k)は k＝0 のとき sin u と一致します。そして sin u に似た性質があるので、この記号が用いられます。母数が明らかなときは sn u と、k を省略して書くことが出来ます。

k がいくつかの値を取ったときの、u と x＝sn(u,k)の関係を下図に示します。

sn 関数は、k が小さいときは sin に似ており、k が 1 に近い場合は tanh 関数に似ています。下のグラフもシンプソンの公式を使い各 x に対する積分値 u を求め、u を横軸、x を縦軸としてグラフ化し、更に k＝0 の sinu と同様に横に延長したものです。



u と x＝sn(u,k)との関係

三角関数と同様に、

$$cn^2(u,k) = 1 - sn^2(u,k) \quad \cdots 4-②$$

で、cn（シーエヌ）関数を定義します。cn 関数も正になったり負になったりしますので、−K≦u≦K の範囲で、

$$cn(u,k) = \sqrt{1 - sn^2(u,k)}$$

です。これは cos に似た関数です。母数が明らかなときは cn u と、k を省略して書くことが出来ます。cn(−K)＝0、cn0＝1、cnK＝0 です。

さらに、

$$dn^2(u,k) = 1 - k^2 sn^2(u,k) \quad \cdots 4-③$$

で、dn（ディーエヌ）関数を定義します。−K≦u≦K の範囲で、

$$dn(u,k) = \sqrt{1 - k^2 sn^2(u,k)}$$

です。母数が明らかなときは dn u と、k を省略して書くことが出来ます。

$dn(-K) = \sqrt{1-k^2} = k'$、dn0＝1、$dn(K) = \sqrt{1-k^2} = k'$ です。但し、$k' = \sqrt{1-k^2}$ です。

4−②式から、

$$cn^2(u,k) + sn^2(u,k) = 1$$

が成り立ちます。4−③式から、

$$k^2 sn^2(u,k) + dn^2(u,k) = 1$$

が成り立ちます。

5、楕円関数の微分

(1)sn 関数の微分

第 1 種楕円積分、$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ ・・・5−①

において、$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = F(x)$、$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = f(x)$ と置きますと、

$$u = [F(x)]_0^x = F(x) - F(0)、\quad u' = \{F(x) - F(0)\}' = F'(x) = f(x)$$

です。F(0)は定数になる為、微分すると無です。5−①式を x で微分しますと、

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

になります。$\frac{dx}{du}$はこの逆数ですから、

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

となります。x＝sn u ですから sn の微分は、

$$\frac{dsnu}{du}=\sqrt{(1-sn^2u)(1-k^2sn^2u)}=cnudnu$$

となります。

(2)cn 関数の微分

cn の微分は、$1-sn^2u$ を y と置きますと、

$$\frac{dcnu}{du}=\frac{d}{du}\sqrt{1-sn^2u}=\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}y$$

になります。上式右辺の前半部分は、

$$\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{1-sn^2u}}$$

です。後半部分は、

$$\frac{d}{du}y=(1-snusnu)'=-(snu'snu+snusnu')=-2cnudnusnu$$

です。sn の微分を使いました。したがって、

$$\frac{dcnu}{du}=\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}y=\frac{-2cnudnusnu}{2\sqrt{1-sn^2u}}=\frac{-\sqrt{1-sn^2u}dnusnu}{\sqrt{1-sn^2u}}=-dnusnu$$

となります。

(3)dn 関数の微分

dn の微分は、$1-k^2sn^2u$ を y と置きますと、

$$\frac{ddnu}{du}=\frac{d}{du}\sqrt{1-k^2sn^2u}=\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}y$$

になります。上式右辺の前半部分は、

$$\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{1}{2\sqrt{1-k^2sn^2u}}$$

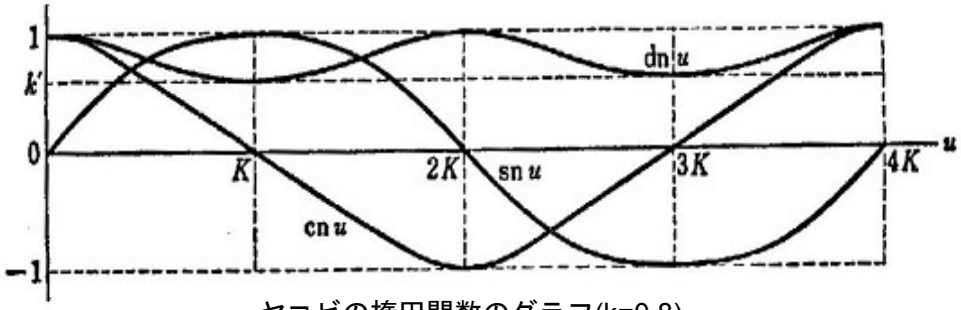
です。後半部分は、

$$\frac{d}{du}y=(1-k^2snusnu)'=-k^2(snu'snu+snusnu')=-2k^2cnudnusnu$$

です。sn の微分を使いました。したがって、

$$\frac{ddnu}{du}=\frac{d}{dy}y^{\frac{1}{2}}\frac{d}{du}y=\frac{-2k^2cnudnusnu}{2\sqrt{1-k^2sn^2u}}=\frac{-k^2cnu\sqrt{1-k^2sn^2u}usnu}{\sqrt{1-k^2sn^2u}}=-k^2cnusnu$$

となります。各微分計算の途中において根号が付いているので、−K≦u≦K の範囲を超えた場合の各微分値の正負が心配されますが、下図の各楕円関数の増減を見れば、0～4K までの微分値の正負（傾きの上向き下向き）が sn、cn、dn で全て合っていることが分ります。



ヤコビの楕円関数のグラフ(k=0.8)

6、実数変数における加法定理

ヤコビの楕円関数は母数 k を持ち、k→0 の極限では三角関数に一致し、k→1 では双曲線関数に一致します。

k→0 で

- sn(u,k)→sin u
- cn(u,k)→cos u
- dn(u,k)→1

となります。

k→1 で

- sn(u,k)→tanh u
- cn(u,k)→sech u
- dn(u,k)→sech u

となります。したがって、ヤコビの楕円関数に加法定理があるとした場合、このような極限で、三角関数と双曲線関数の加法定理に近づかなければなりません。

(1)sn 関数の加法定理

sn の場合 k＝0 で sin の加法定理、

$$\sin(u+v)=\sin u\cos v+\cos u\sin v \quad \cdots\cdots 6-①$$

になり、k＝1 で tanh の加法定理、

$$\tanh(u+v)=\frac{\tanh u+\tanh v}{1+\tanh u\tanh v}\quad\cdots\cdots 6-②$$

になります。これらを極限値とする sn の加法定理は、6－①、②式を両端として、0＜k＜1の場合を補間したものになる筈です。

6－①式は、

$$\sin(u+v)=\sin u\frac{d\sin v}{dv}+\sin v\frac{d\sin u}{du}$$

と書けます。

これと似た形に 6－②式の分子を書き直します。

$$\frac{d\tanh v}{dv}=\mathrm{sec}\,h^2v=1-\tanh^2 v$$

$$\frac{d\tanh u}{du}=\mathrm{sec}\,h^2u=1-\tanh^2 u$$

ですから、

$$\begin{aligned}&\tanh u\frac{d\tanh v}{dv}+\tanh v\frac{d\tanh u}{du}\\&=\tanh u(1-\tanh^2 v)+\tanh v(1-\tanh^2 u)\\&=\tanh u+\tanh v-\tanh u\tanh^2 v-\tanh v\tanh^2 u\\&=(\tanh u+\tanh v)(1-\tanh u\tanh v)\end{aligned}$$

となります。したがって、

$$\tanh u+\tanh v=\frac{\tanh u\frac{d\tanh v}{dv}+\tanh v\frac{d\tanh u}{du}}{1-\tanh u\tanh v}$$

です。tanh の加法定理は、6－②式に上式を代入して、

$$\tanh(u+v)=\frac{\tanh u\frac{d\tanh v}{dv}+\tanh v\frac{d\tanh u}{du}}{1-\tanh u\tanh v}\bullet\frac{1}{1+\tanh u\tanh v}$$

$$=\frac{\tanh u\frac{d\tanh v}{dv}+\tanh v\frac{d\tanh u}{du}}{1-\tanh^2 u\tanh^2 v}$$

となります。sin の加法定理を再掲しますと、

$$\sin(u+v)=\sin u\frac{d\sin v}{dv}+\sin v\frac{d\sin u}{du}$$

です。上記 2 つの式を比べますと、f(u)を sin u 又は tanh u、f(v)を sin v 又は tanh v とした時に、

$$f(u+v)=\frac{f(u)\frac{df(v)}{dv}+f(v)\frac{df(u)}{du}}{1-k^2f(u)^2f(v)^2}$$

の形にまとめられることが分ります。f(u)＝sin u、k＝0 の場合が sin の加法定理、f(u)＝tanh u、k＝1 の場合が tanh の加法定理です。

f(u)＝sn u と置きますと、

$$\frac{df(u)}{du}=cnudnu$$

f(v)＝sn v と置きますと、

$$\frac{df(v)}{dv}=cnvdnv$$

ですから、こうして考えられる sn 関数の加法定理は

$$sn(u+v)=\frac{snucnvdnv+snvcnudnu}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

となります。

(2) sn 関数の加法定理の検証

これが正しい補間式かを検証します。u＋v＝c と置きますと、v＝c－u となりますので上式は、

$$snc=\frac{snucn(c-u)dn(c-u)+sn(c-u)cnudnu}{1-k^2sn^2usn^2(c-u)}$$

となります。c の値を固定しますと右辺は u の関数になります。これを F(u)で表します。

$$F(u)=\frac{snucn(c-u)dn(c-u)+sn(c-u)cnudnu}{1-k^2sn^2usn^2(c-u)}\quad\cdots 6-③$$

証明しようとすることは、F(u)は u の値に無関係であり、それが定数 sn c と一致することです。c の値が固定されていれば u は任意となり、sn 関数の加法定理の式の正しいことが証明されます。予備の微分計算を行います。

snu の微分 sn'u は 5、で計算しました。

$$sn'u=cnudnu$$

です。

sn'u の微分 sn''u は、掛け算の上式を微分して、

$$sn''u=(cnudnu)'$$

$$= (cnu)'dnu + cnu(dnu)'$$

$$= (-snudnu)dnu + cnu(-k^2snucnu)$$

$$= -snudn^2u - k^2snucn^2u$$

$$= -snu(1-k^2sn^2u) - k^2snu(1-sn^2u)$$

$$= -snu + k^2sn^3u - k^2snu + k^2sn^3u$$
$$= -snu - k^2snu + 2k^2sn^3u$$

$$= -(1+k^2)snu + 2k^2sn^3u$$

です。

sn^2u の微分$(sn^2u)'$は、$f=w^2$、$w=snu$ と置きます。f の微分 $\frac{df}{du}$ は合成関数の微分により、

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dw}\bullet\frac{dw}{du} = \frac{dw^2}{dw}\bullet\frac{dsnu}{du}$$
$$= 2w\bullet cnudnu$$
$$= 2snucnudnu$$

です。

sn(c−u)の微分 sn'(c−u)は、$f=snw$、$w=c-u$ と置きます。f の微分 $\frac{df}{du}$ は、合成関数の微分により、

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dw}\bullet\frac{dw}{du} = \frac{dsnw}{dw}\bullet\frac{d(c-u)}{du}$$
$$= cnwdnw(-1)$$

$$= -cn(c-u)dn(c-u)$$

です。

sn'(c−u)の微分 sn''(c−u)は、掛け算の上式を微分して、

$$sn''(c-u) = \{-cn(c-u)dn(c-u)\}'$$
$$= -\{cn'(c-u)dn(c-u) + cn(c-u)dn'(c-u)\}$$

$$= -\{sn(c-u)dn(c-u)dn(c-u) + cn(c-u)k^2sn(c-u)cn(c-u)\}$$

$$= -\{sn(c-u)dn^2(c-u) + k^2sn(c-u)cn^2(c-u)\}$$

$$= -[sn(c-u)\{1-k^2sn^2(c-u)\} + k^2sn(c-u)\{1-sn^2(c-u)\}]$$

$$= -\{sn(c-u) - k^2sn^3(c-u) + k^2sn(c-u) - k^2sn^3(c-u)\}$$

$$= -sn(c-u) + k^2sn^3(c-u) - k^2sn(c-u) + k^2sn^3(c-u)$$

$$= -(1+k^2)sn(c-u) + 2k^2sn^3(c-u)$$

です。

$sn^2(c-u)$の微分$\{sn^2(c-u)\}'$は、$f=w^2$、$w=sn(c-u)$と置きます。f の微分$\frac{df}{du}$は合成関数の微分により、

$$\frac{df}{du} = \frac{df}{dw} \bullet \frac{dw}{du} = \frac{dw^2}{dw} \bullet \frac{dsn(c-u)}{du}$$
$$= 2w \bullet -cn(c-u)dn(c-u)$$
$$= -2sn(c-u)cn(c-u)dn(c-u)$$

です。予備の微分計算を終了します。

6－③式の F(u)を、分子 N と分母 D に分けますと、

$N = snucn(c-u)dn(c-u) + sn(c-u)cnudnu$

$D = 1 - k^2sn^2u\ sn^2(c-u)$

になります。予備の微分計算の結果を使い N を変形しますと、

$$N = snucn(c-u)dn(c-u) + sn(c-u)cnudnu$$
$$= sn(c-u)cnudnu + snucn(c-u)dn(c-u)$$
$$= sn(c-u)sn'u - snusn'(c-u) \quad \cdots 6-④$$

になります。N を u で微分しますと、6－④式から、

$$N' = sn'(c-u)sn'u + sn(c-u)sn''u - \{sn'usn'(c-u) + snusn''(c-u)\}$$
$$= sn'(c-u)sn'u + sn(c-u)sn''u - sn'(c-u)sn'u - snusn''(c-u)$$
$$= sn(c-u)sn''u - snusn''(c-u)$$

です。さらに予備の微分計算の結果を代入して、

$$= sn(c-u)\{-(1+k^2)snu + 2k^2sn^3u\} - snu\{-(1+k^2)sn(c-u) + 2k^2sn^3(c-u)\}$$

$$= -(1+k^2)snusn(c-u) + 2k^2sn^3usn(c-u) + (1+k^2)snusn(c-u) - 2k^2snusn^3(c-u)$$

$$= 2k^2sn^3usn(c-u) - 2k^2snusn^3(c-u)$$

$$= 2k^2snusn(c-u)\{sn^2u - sn^2(c-u)\}$$

となります。これが N の微分です。次に D を u で微分しますと、

$$D' = \{1 - k^2 sn^2 u sn^2(c-u)\}'$$

$$= -k^2\{sn^2 u sn^2(c-u)\}'$$

$$= -k^2[(sn^2 u)' sn^2(c-u) + sn^2 u\{sn^2(c-u)\}']$$

です。予備の微分計算の結果を代入して、

$$= -k^2[2snucnudnusn^2(c-u) + sn^2 u\{-2sn(c-u)cn(c-u)dn(c-u)\}]$$

$$= -2k^2\{snucnudnus n^2(c-u) - sn^2 usn(c-u)cn(c-u)dn(c-u)\}$$

$$= 2k^2\{sn^2 usn(c-u)cn(c-u)dn(c-u) - snucnudnus n^2(c-u)\}$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)\{snucn(c-u)dn(c-u) - sn(c-u)cnudnu\}$$

となります。これが D の微分です。

ここで、ND'を計算しますと、

$$ND' = \{snucn(c-u)dn(c-u) + sn(c-u)cnudnu\}2k^2 snusn(c-u)$$
$$\{snucn(c-u)dn(c-u) - sn(c-u)cnudnu\}$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)\{sn^2 ucn^2(c-u)dn^2(c-u) - sn^2(c-u)cn^2 udn^2 u\}$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)[sn^2 u\{1-sn^2(c-u)\}\{1-k^2 sn^2(c-u)\} - sn^2(c-u)\{1-sn^2 u\}\{1-k^2 sn^2 u\}]$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)[\{sn^2 u - sn^2 usn^2(c-u)\}\{1-k^2 sn^2(c-u)\}$$
$$-\{sn^2(c-u) - sn^2 usn^2(c-u)\}\{1-k^2 sn^2 u\}]$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)[\{sn^2 u - k^2 sn^2 usn^2(c-u) - sn^2 usn^2(c-u) + k^2 sn^2 usn^4(c-u)\}$$
$$-\{sn^2(c-u) - k^2 sn^2 usn^2(c-u) - sn^2 usn^2(c-u) + k^2 sn^4 usn^2(c-u)\}]$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)\{sn^2 u - k^2 sn^2 usn^2(c-u) - sn^2 usn^2(c-u) + k^2 sn^2 usn^4(c-u)$$
$$-sn^2(c-u) + k^2 sn^2 usn^2(c-u) + sn^2 usn^2(c-u) - k^2 sn^4 usn^2(c-u)\}$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)\{sn^2u + k^2sn^2usn^4(c-u) - sn^2(c-u) - k^2sn^4usn^2(c-u)\}$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)[sn^2u + sn^2(c-u)\{k^2sn^2usn^2(c-u)\}$$

$$- sn^2(c-u) - sn^2u\{k^2sn^2usn^2(c-u)\}]$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)[\{sn^2u - sn^2(c-u)\} - \{sn^2u - sn^2(c-u)\}\{k^2sn^2usn^2(c-u)\}]$$

$$= 2k^2 snusn(c-u)\{sn^2u - sn^2(c-u)\}\{1 - k^2sn^2usn^2(c-u)\}$$

$$= N'D$$

になります。ND'と N'D は一致しました。N'と D を再掲しますと、

$$N' = 2k^2 snusn(c-u)\{sn^2u - sn^2(c-u)\}$$

$$D = 1 - k^2sn^2u\ sn^2(c-u)$$

です。　以上を準備したところで、F(u)の微分 $\frac{dF(u)}{du}$ を求めますと、

$$\frac{dF(u)}{du} = (\frac{N}{D})' = \frac{N'D - ND'}{D^2} = 0$$

になります。

ここでは、実数変数で考えていますで、0＜k＜1 の範囲で分母の $D = 1 - k^2sn^2usn^2(c-u)$ が 0 になることは無いです。u で微分した値が 0 であることは、F(u) が u の値に無関係な定数であることを示しています。F(u) が u の値に無関係なので、c の値が固定されていれば u は任意です。sn 関数の加法定理の式が証明されました。

(3)cn 関数の加法定理

cn 関数の加法定理は

$$cn^2(u+v) = 1 - sn^2(u+v) = 1 - \left(\frac{snucnvdnv + snvcnudnu}{1 - k^2sn^2usn^2v}\right)^2$$

$$= \frac{(1 - k^2sn^2usn^2v)^2 - (snucnvdnv + snvcnudnu)^2}{(1 - k^2sn^2usn^2v)^2}$$

を解けば良いです。

$$1 - k^2sn^2usn^2v$$

は、$-sn^2u + sn^2u$ を付け加え、次のように変形することが出来ます。

$$1 - k^2sn^2usn^2v = 1 - sn^2u + sn^2u - k^2sn^2usn^2v$$

$$= 1 - sn^2u + sn^2u(1 - k^2sn^2v)$$
$$= 1 - sn^2u + sn^2udn^2v$$
$$= cn^2u + sn^2udn^2v$$

また、$-sn^2v+sn^2v$ を付け加え、次のようにも変形出来ます。

$$1 - k^2sn^2usn^2v = 1 - sn^2v + sn^2v - k^2sn^2usn^2v$$
$$= 1 - sn^2v + sn^2v(1 - k^2sn^2u)$$
$$= 1 - sn^2v + sn^2vdn^2u$$
$$= cn^2v + sn^2vdn^2u$$

したがって、

$cn^2(u+v)$

$$= \frac{(cn^2u + sn^2udn^2v)(cn^2v + sn^2vdn^2u) - (snucnvdnv + snvcnudnu)^2}{(1 - k^2sn^2usn^2v)^2}$$

$$= \frac{cn^2ucn^2v + sn^2vcn^2udn^2u + sn^2ucn^2vdn^2v + sn^2usn^2vdn^2udn^2v}{(1 - k^2sn^2usn^2v)^2}$$

$$\underline{- sn^2ucn^2vdn^2v - 2snusnvcnucnvdnudnv - sn^2vcn^2udn^2u}$$

$$= \frac{cn^2ucn^2v - 2snusnvcnucnvdnudnv + sn^2usn^2vdn^2udn^2v}{(1 - k^2sn^2usn^2v)^2}$$

$$= \frac{(cnucnv - snusnvdnudnv)^2}{(1 - k^2sn^2usn^2v)^2}$$

となり、cn の加法定理は、

$$cn(u+v) = \frac{cnucnv - snusnvdnudnv}{1 - k^2sn^2usn^2v}$$

になります。

(4)dn 関数の加法定理

dn 関数の加法定理は、

$$dn^2(u+v) = 1 - k^2sn^2(u+v) = 1 - \left\{\frac{k^2(snucnvdnv + snvcnudnu)}{1 - k^2sn^2usn^2v}\right\}^2$$

$$= \frac{(1-k^2sn^2usn^2v)^2 - k^2(snucnvdnv + snvcnudnu)^2}{(1-k^2sn^2usn^2v)^2}$$

を解けば良いです。

$$1-k^2sn^2usn^2v$$

は、$-k^2sn^2u+k^2sn^2u$ を付け加え、次のように変形することが出来ます。

$$\begin{aligned} 1-k^2sn^2usn^2v &= 1-k^2sn^2u+k^2sn^2u-k^2sn^2usn^2v \\ &= 1-k^2sn^2u+k^2sn^2u(1-sn^2v) \\ &= dn^2u+k^2sn^2ucn^2v \end{aligned}$$

また、$-k^2sn^2v+k^2sn^2v$ を付け加え、次のようにも変形出来ます。

$$\begin{aligned} 1-k^2sn^2usn^2v &= 1-k^2sn^2v+k^2sn^2v-k^2sn^2usn^2v \\ &= 1-k^2sn^2v+k^2sn^2v(1-sn^2u) \\ &= dn^2v+k^2sn^2vcn^2u \end{aligned}$$

したがって、

$$dn^2(u+v)$$

$$= \frac{(dn^2u+k^2sn^2ucn^2v)(dn^2v+k^2sn^2vcn^2u) - k^2(snucnvdnv+snvcnudnu)^2}{(1-k^2sn^2usn^2v)^2}$$

$$= \frac{dn^2udn^2v + k^2sn^2vcn^2udn^2u + k^2sn^2ucn^2vdn^2v + k^4sn^2usn^2vcn^2ucn^2v}{(1-k^2sn^2usn^2v)^2}$$

$$\underline{-k^2sn^2ucn^2vdn^2v - 2k^2snusnvcnucnvdnudnv - k^2sn^2vcn^2udn^2u}$$

$$= \frac{dn^2udn^2v - 2k^2snusnvcnucnvdnudnv + k^4sn^2usn^2vcn^2ucn^2v}{(1-k^2sn^2usn^2v)^2}$$

$$= \frac{(dnudnv - k^2snusnvcnucnv)^2}{(1-k^2sn^2usn^2v)^2}$$

となり、dn の加法定理は、

$$dn(u+v) = \frac{dnudnv - k^2snusnvcnucnv}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

になります。

(5)倍数公式

sn の加法定理の v を u に代えますと、

$$sn2u = sn(u+u) = \frac{snucnudnu + snucnudnu}{1-k^2sn^2usn^2u}$$

$$= \frac{2snucnudnu}{1-k^2sn^4u}$$

になります。

cn の加法定理の v を u に代えますと、

$$cn2u = cn(u+u) = \frac{cnucnu - snusnudnudnu}{1-k^2sn^2usn^2u} = \frac{cn^2u - sn^2udn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

$$= \frac{1-sn^2u - sn^2u(1-k^2sn^2u)}{1-k^2sn^4u} = \frac{1-2sn^2u + k^2sn^4u}{1-k^2sn^4u}$$

になります。

dn の加法定理の v を u に代えますと、

$$dn2u = dn(u+u) = \frac{dnudnu - k^2snusnucnucnu}{1-k^2sn^2usn^2u} = \frac{dn^2u - k^2sn^2ucn^2u}{1-k^2sn^4u}$$

$$= \frac{1-k^2sn^2u - k^2sn^2u(1-sn^2u)}{1-k^2sn^4u} = \frac{1-2k^2sn^2u + k^2sn^4u}{1-k^2sn^4u}$$

になります。以上が倍数公式です。

(6)半数公式

sn の場合

cn、dn の倍数公式で u の代わりに $\frac{u}{2}$ と置きますと、

$$cnu = cn(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}) = \frac{1-2sn^2\frac{u}{2} + k^2sn^4\frac{u}{2}}{1-k^2sn^4\frac{u}{2}}$$

$$dnu = dn(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}) = \frac{1-2k^2sn^2\frac{u}{2} + k^2sn^4\frac{u}{2}}{1-k^2sn^4\frac{u}{2}}$$

になります。次の計算を行いますと、

$$\frac{1-\mathrm{cnu}}{1+\mathrm{dnu}}=\left(1-\frac{1-2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\right)\div\left(1+\frac{1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\right)$$

$$=\frac{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}-1+2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\bullet\frac{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}+1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

$$=\frac{2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}{2(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}$$

$$=\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}$$

です。したがって、

$$\mathrm{sn}\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-\mathrm{cnu}}{1+\mathrm{dnu}}}$$

になります。

cn の場合

cn の倍数公式の途中で u の代わりに $\frac{u}{2}$ と置きますと、

$$\mathrm{cnu}=\mathrm{cn}(\frac{u}{2}+\frac{u}{2})=\frac{\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

になります。dn の倍数公式の途中で u の代わりに $\frac{u}{2}$ と置きますと、

$$\mathrm{dnu}=\mathrm{dn}(\frac{u}{2}+\frac{u}{2})=\frac{\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}=\frac{1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

になります。次の計算を行いますと、

$$\frac{\mathrm{dnu}+\mathrm{cnu}}{1+\mathrm{dnu}}=\left(\frac{\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\right)\div\left(1+\frac{1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})+\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\bullet\frac{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}+1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

$$=\frac{(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}{2-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}$$

$$=\frac{2\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}{2(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}$$

$$=\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}$$

です。したがって、

$$\mathrm{cn}\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{dnu}+\mathrm{cnu}}{1+\mathrm{dnu}}}$$

になります。

dn の場合

cn、dn の倍数公式の途中で u の代わりに$\frac{u}{2}$と置きますと、

$$\mathrm{cnu}=\mathrm{cn}(\frac{u}{2}+\frac{u}{2})=\frac{\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}=\frac{1-2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

$$\mathrm{dnu}=\mathrm{dn}(\frac{u}{2}+\frac{u}{2})=\frac{\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}=\frac{1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

になります。次の計算を行いますと、

$$\frac{\mathrm{dnu}+\mathrm{cnu}}{1+\mathrm{cnu}}=\left(\frac{\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\right)\div\left(1+\frac{1-2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})+\mathrm{cn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\bullet\frac{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}+1-2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

$$=\frac{\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})+\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}{2-2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}}$$

$$=\frac{2\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}(1-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}{2(1-\mathrm{sn}^2\frac{u}{2})}$$

$$=\mathrm{dn}^2\frac{u}{2}$$

です。したがって、

$$\mathrm{dn}\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{\mathrm{dnu}+\mathrm{cnu}}{1+\mathrm{cnu}}}$$

になります。さらに次の計算を行いますと、

$$\frac{\mathrm{k'}^2+\mathrm{dnu}+\mathrm{k}^2\mathrm{cnu}}{1+\mathrm{dnu}}=\frac{\mathrm{k'}^2(1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2})+1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2(1-2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2})}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

$$\div\left(1+\frac{1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\right)$$

$$=\frac{1+\mathrm{k}^2+\mathrm{k'}^2-4\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}(1+\mathrm{k}^2-\mathrm{k'}^2)}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}\bullet\frac{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}+1-2\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\frac{u}{2}+\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^4\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{1+k^2+(1-k^2)-4k^2sn^2\frac{u}{2}+k^2sn^4\frac{u}{2}\{1+k^2-(1-k^2)\}}{2-2k^2sn^2\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{2-4k^2sn^2\frac{u}{2}+2k^4sn^4\frac{u}{2}}{2-2k^2sn^2\frac{u}{2}}$$

$$= \frac{2(1-2k^2sn^2\frac{u}{2}+k^4sn^4\frac{u}{2})}{2(1-k^2sn^2\frac{u}{2})}$$

$$= \frac{\left(1-k^2sn^2\frac{u}{2}\right)^2}{1-k^2sn^2\frac{u}{2}}$$

$$= dn^2\frac{u}{2}$$

です。したがって、

$$dn\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{k'^2+dnu+k^2cnu}{1+dnu}}$$

になります。dn の半数公式は、

$$dn\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+cnu}} = \sqrt{\frac{k'^2+dnu+k^2cnu}{1+dnu}}$$

です。分母を零にしない為、2 番目の公式が作られたようです。半数公式は以上です。

7、変域を実数全域に広げる

この章の 4、(3)で第 1 種楕円積分を、積分上端 x の関数として sn^{-1}（アークエスネヌ）と定義しました。

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = sn^{-1}x$$

sn^{-1} の逆関数として、

$$x = snu = sn(u,k)$$

を定義しました。これがヤコビの楕円関数のひとつ、snu （エスエヌユー）の定義です。
当初の u の変域は－K(k)≦u≦K(k)でした。

これを三角関数と同じ、無限多価関数に直します。

u の変域を、－K(k)≦u≦K(k)から、－∞K(k)＜u＜＋∞K(k)に拡張します。

加法定理を使った 4K までの延長は、以下の様になります。

(1) u＋K の場合

sn の加法定理は、

$$sn(u+v)=\frac{snucnvdnv+snvcnudnu}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$snK = 1$$
$$cnK = 0$$
$$dnK = \sqrt{1-k^2sn^2K} = \sqrt{1-k^2} = k'$$

ですから、v＝K の場合、

$$sn(u+K)=\frac{snucnKdnK+snKcnudnu}{1-k^2sn^2usn^2K}$$
$$=\frac{cnudnu}{1-k^2sn^2u}$$
$$=\frac{cnudnu}{dn^2u}$$
$$=\frac{cnu}{dnu}$$

です。cn の加法定理は、

$$cn(u+v)=\frac{cnucnv-snusnvdnudnv}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$snK = 1$$
$$cnK = 0$$
$$dnK = \sqrt{1-k^2sn^2K} = \sqrt{1-k^2} = k'$$

ですから、v＝K の場合、

$$cn(u+K)=\frac{cnucnK-snusnKdnudnK}{1-k^2sn^2usn^2K}$$
$$=\frac{-snudnuk'}{dn^2u}$$

$$= \frac{-\mathrm{snuk'}}{\mathrm{dnu}}$$

です。dn の加法定理は、

$$\mathrm{dn}(u+v) = \frac{\mathrm{dnudnv} - k^2 \mathrm{snusnvcnucnv}}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u \mathrm{sn}^2 v}$$

です。

$$\mathrm{snK} = 1$$
$$\mathrm{cnK} = 0$$
$$\mathrm{dnK} = \sqrt{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 K} = \sqrt{1 - k^2} = k'$$

ですから、v=K の場合、

$$\mathrm{dn}(u+K) = \frac{\mathrm{dnudnK} - k^2 \mathrm{snusnKcnucnK}}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u \mathrm{sn}^2 K}$$

$$= \frac{\mathrm{dnuk'}}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u}$$
$$= \frac{\mathrm{dnuk'}}{\mathrm{dn}^2 u}$$
$$= \frac{k'}{\mathrm{dnu}}$$

です。これらの式において、u=K と置きますと、

$$\mathrm{sn}(K+K) = \mathrm{sn}2K = \frac{\mathrm{cnK}}{\mathrm{dnK}} = \frac{0}{k'} = 0$$
$$\mathrm{cn}(K+K) = \mathrm{cn}2K = \frac{-\mathrm{snKk'}}{\mathrm{dnK}} = \frac{-k'}{k'} = -1$$
$$\mathrm{dn}(K+K) = \mathrm{dn}2K = \frac{k'}{\mathrm{dnK}} = \frac{k'}{k'} = 1$$

になります。また、

$$\mathrm{sn}^2(u+K) + \mathrm{cn}^2(u+K) = \left(\frac{\mathrm{cnu}}{\mathrm{dnu}}\right)^2 + \left(\frac{-\mathrm{snu}\sqrt{1-k^2}}{\mathrm{dnu}}\right)^2$$
$$= \frac{\mathrm{cn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u} + \frac{(1-k^2)\mathrm{sn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u}$$
$$= \frac{\mathrm{cn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u} + \frac{\mathrm{sn}^2 u - k^2 \mathrm{sn}^2 u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u}$$

$$= \frac{cn^2u + sn^2u - k^2sn^2u}{1 - k^2sn^2u}$$
$$= \frac{1 - k^2sn^2u}{1 - k^2sn^2u}$$
$$= 1$$

が満足されています。

(2) u＋2K の場合

sn の加法定理は、

$$sn(u+v) = \frac{snucnvdnv + snvcnudnu}{1 - k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$sn2K = 0$$
$$cn2K = -1$$
$$dn2K = 1$$

ですから、v＝2K の場合、

$$sn(u+2K) = \frac{snucn2Kdn2K + sn2Kcnudnu}{1 - k^2sn^2usn^2 2K}$$
$$= \frac{-snu}{1}$$
$$= -snu$$

です。cn の加法定理は、

$$cn(u+v) = \frac{cnucnv - snusnvdnudnv}{1 - k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$sn2K = 0$$
$$cn2K = -1$$
$$dn2K = 1$$

ですから、v＝2K の場合、

$$cn(u+2K) = \frac{cnucn2K - snusn2Kdnudn2K}{1 - k^2sn^2usn^2 2K}$$
$$= \frac{-cnu}{1}$$
$$= -cnu$$

です。dn の加法定理は、

$$dn(u+v)=\frac{dnudnv-k^2snusnvcnucnv}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$sn2K=0$$
$$cn2K=-1$$
$$dn2K=1$$

ですから、v＝2K の場合、

$$dn(u+2K)=\frac{dnudn2K-k^2snusn2Kcnucn2K}{1-k^2sn^2usn^22K}$$

$$=\frac{dnu}{1}$$
$$=dnu$$

です。これらの式において、u＝K と置きますと、

$$sn(K+2K)=sn3K=-snK=-1$$
$$cn(K+2K)=cn3K=-cnK=0$$
$$dn(K+2K)=dn3K=dnK=k'$$

になります。この時、

$$sn^2(u+2K)+cn^2(u+2K)=(-snu)^2+(-cnu)^2$$

$$=sn^2u+cn^2u$$
$$=1$$

が満足されています。

(3)u＋3K の場合

sn の加法定理は、

$$sn(u+v)=\frac{snucnvdnv+snvcnudnu}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$sn3K=-1$$
$$cn3K=0$$
$$dn3K=k'$$

ですから、v＝3K の場合、

$$sn(u+3K)=\frac{snucn3Kdn3K+sn3Kcnudnu}{1-k^2sn^2usn^23K}$$

$$= \frac{-\mathrm{cnudnu}}{\mathrm{dn}^2\mathrm{u}}$$

$$= \frac{-\mathrm{cnu}}{\mathrm{dnu}}$$

です。cn の加法定理は、

$$\mathrm{cn}(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \frac{\mathrm{cnucnv} - \mathrm{snusnvdnudnv}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v}}$$

です。

$$\mathrm{sn3K} = -1$$
$$\mathrm{cn3K} = 0$$
$$\mathrm{dn3K} = \mathrm{k}'$$

ですから、v＝3K の場合、

$$\mathrm{cn}(\mathrm{u}+3\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{cnucn3K} - \mathrm{snusn3Kdnudn3K}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2 3\mathrm{K}}$$

$$= \frac{\mathrm{snudnuk}'}{\mathrm{dn}^2\mathrm{u}}$$

$$= \frac{\mathrm{k}'\mathrm{snu}}{\mathrm{dnu}}$$

です。dn の加法定理は、

$$\mathrm{dn}(\mathrm{u}+\mathrm{v}) = \frac{\mathrm{dnudnv} - \mathrm{k}^2\mathrm{snusnvcnucnv}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2\mathrm{v}}$$

です。

$$\mathrm{sn3K} = -1$$
$$\mathrm{cn3K} = 0$$
$$\mathrm{dn3K} = \mathrm{k}'$$

ですから、v＝3K の場合、

$$\mathrm{dn}(\mathrm{u}+3\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{dnudn3K} - \mathrm{k}^2\mathrm{snusn3Kcnucn3K}}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2\mathrm{usn}^2 3\mathrm{K}}$$

$$= \frac{\mathrm{dnuk}'}{\mathrm{dn}^2\mathrm{u}}$$

$$= \frac{\mathrm{k}'}{\mathrm{dnu}}$$

です。これらの式において、u＝K と置きますと、

$$sn(K+3K)=sn4K=\frac{-cnK}{dnK}=0$$

$$cn(K+3K)=cn4K=\frac{k'snK}{dnK}=\frac{k'}{k'}=1$$

$$dn(K+3K)=dn4K=\frac{k'}{dnK}=\frac{k'}{k'}=1$$

になります。このとき、

$$sn^2(u+3K)+cn^2(u+3K)=\left(\frac{-cnu}{dnu}\right)^2+\left(\frac{k'snu}{dnu}\right)^2$$

$$=\frac{cn^2u}{dn^2u}+\frac{k'^2sn^2u}{dn^2u}$$

$$=\frac{cn^2u}{dn^2u}+\frac{(1-k^2)sn^2u}{dn^2u}$$

$$=\frac{cn^2u+sn^2u-k^2sn^2u}{1-k^2sn^2u}$$

$$=\frac{1-k^2sn^2u}{1-k^2sn^2u}$$

$$=1$$

が満足されています。

(4)u＋4K の場合

sn の加法定理は、

$$sn(u+v)=\frac{snucnvdnv+snvcnudnu}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$sn4K=0$$

$$cn4K=1$$

$$dn4K=1$$

ですから、v＝4K の場合、

$$sn(u+4K)=\frac{snucn4Kdn4K+sn4Kcnudnu}{1-k^2sn^2usn^24K}$$

$$=\frac{snu}{1}$$

$$=snu$$

です。cn の加法定理は、

$$cn(u+v)=\frac{cnucnv-snusnvdnudnv}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$sn4K=0$$
$$cn4K=1$$
$$dn4K=1$$

ですから、v＝4K の場合、

$$cn(u+4K)=\frac{cnucn4K-snusn4Kdnudn4K}{1-k^2sn^2usn^24K}$$
$$=\frac{cnu}{1}$$
$$=cnu$$

です。dn の加法定理は、

$$dn(u+v)=\frac{dnudnv-k^2snusnvcnucnv}{1-k^2sn^2usn^2v}$$

です。

$$sn4K=0$$
$$cn4K=1$$
$$dn4K=1$$

ですから、v＝4K の場合、

$$dn(u+4K)=\frac{dnudn4K-k^2snusn4Kcnucn4K}{1-k^2sn^2usn^24K}$$
$$=\frac{dnu}{1}$$
$$=dnu$$

です。すべて u の時の値に戻ります。このとき、

$$sn^2(u+4K)+cn^2(u+4K)=sn^2u+cn^2u$$
$$=1$$

が満足されています。

以上により、加法定理を使い u の変域を拡張した場合、sn と cn はともに 4K という周期を持ち、dn は 2K という周期を持つことが分ります。いつも $sn^2u+cn^2u=1$ が満足されています。u の変域を、−K(k)≦u≦K(k)から、−∞K(k)＜u＜＋∞K(k)に拡張しても良いと思われます。

8、純虚数変数の楕円関数

実数変数の楕円関数の加法定理が分りました。三角関数、双曲線関数と同様に加法定理における変数は、実数である必要はありません。加法定理を使えば、複素数変数の楕円関数を求めることが出来るようになります。初めに純虚数の楕円関数を求め、順次複素数にまで定義を広げていきたいと思います。

(1) tn 関数について

まず tn（ティーエヌ）関数の解説をします。

関数 $tn(u,k)$ を $\tan u = \dfrac{\sin u}{\cos u}$ にならって、

$$x = tn(u,k) = \frac{sn(u,k)}{cn(u,k)}$$

で表します。主値は sn、cn 関数と同じ、$-K(k) \leqq u \leqq +K(k)$です。

4(1)で $\sin^{-1}$ を積分の形で表した時と同じく、tn 関数の逆関数、$u = tn^{-1}u(x,k)$（アークティーエヌ）を積分の形で表します。$u = tn^{-1}u(x,k)$ の $\dfrac{du}{dx}$ を求める場合、$u = tn^{-1}u(x,k)$ を逆に書き直し、$x = tn(u,k)$ から $\dfrac{du}{dx}$ を求めるのが普通です。$tn(u,k) = x$ の両辺を x で微分しますと、

$$\frac{d\,tn(u,k)}{du} \bullet \frac{du}{dx} = \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{d\,tn(u,k)}{du} \bullet \frac{du}{dx} = 1 \quad \cdots 8-①$$

です。$\dfrac{d\,tn(u,k)}{du}$ の部分だけを計算しますと、

$$\frac{d\,tn(u,k)}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{sn(u,k)}{cn(u,k)}\right) = \frac{sn'(u,k)cn(u,k) - sn(u,k)cn'(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

$$= \frac{cn(u,k)dn(u,k)cn(u,k) + sn(u,k)sn(u,k)dn(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

$$= \frac{cn^2(u,k)dn(u,k) + sn^2(u,k)dn(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

$$= \frac{dn(u,k)\{cn^2(u,k) + sn^2(u,k)\}}{cn^2(u,k)} = \frac{dn(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

になります。8－①式は、

$$\frac{dn(u,k)}{cn^2(u,k)} \bullet \frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{cn^2(u,k)}{dn(u,k)}\quad\cdots 8-②$$

です。$x=tn(u,k)=\frac{sn(u,k)}{cn(u,k)}$ に於いて、

$$x^2=\frac{sn^2(u,k)}{cn^2(u,k)}=\frac{1-cn^2(u,k)}{cn^2(u,k)}=\frac{1}{cn^2(u,k)}-1$$

$$1+x^2=\frac{1}{cn^2(u,k)}$$

$$cn^2(u,k)=\frac{1}{1+x^2}$$

となります。また、

$$dn^2(u,k)=1-k^2sn^2(u,k)=1-k^2\{1-cn^2(u,k)\}=1-k^2+k^2cn^2(u,k)$$

$$=1-k^2+\frac{k^2}{1+x^2}=\frac{1+x^2-k^2x^2}{1+x^2}$$

$$=\frac{1+x^2(1-k^2)}{1+x^2}=\frac{1+k'^2x^2}{1+x^2}\qquad \text{但し}k'^2=1-k^2\ \text{（補母数）}$$

になります。8－②式は、

$$\frac{du}{dx}=\frac{cn^2(u,k)}{dn(u,k)}=\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\sqrt{\frac{1+k'^2x^2}{1+x^2}}}=\frac{1}{1+x^2}\bullet\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+k'^2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}}$$

となります。これが $u=tn^{-1}u(x,k)$ を x で微分したものです。ここからふたたび u を求めるには、この微分方程式を $u=tn^{-1}u(x,k)$ の初期条件で解けば良いです。$u=tn^{-1}u(x,k)$ ですから $x=tn(u,k)$ です。u が 0 の場合 $x=tn(0,k)=\frac{sn(0,k)}{cn(0,k)}=\frac{0}{1}=0$ です。したがって初期条件は $u_0=0$、$x_0=0$ です。まず変数分離を行い、

$$du=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}}dx$$

となります。初期条件のもとで両辺を積分します（上端下端が出る理由は 3 次連立チェビシェフの章の最後を参照して下さい）と、

$$\int_0^u du=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2x^2)}}dx$$

$$[u]_0^u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2 x^2)}}dx$$

$$u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2 x^2)}}dx = \left[tn^{-1}(x,k)\right]_0^x = tn^{-1}(x,k) \quad \cdots 8-③$$

になります$u = tn^{-1}u(x,k)$ですから、これが$tn^{-1}u(x,k)$を積分で表したものになります。u は積分上端 x の関数として与えられ、

$$u = \left[tn^{-1}(x,k)\right]_0^x = tn^{-1}(x,k)$$

となります。逆にすれば、

$$tn(u,k) = x$$

です。積分 8－③式の被積分関数の母数k' と、tn の母数 k は互いに補母数です。この積分が正しいか、

$$u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2 x^2)}}dx = tn^{-1}(x,k)$$

の証明を行います。$k'^2 = 1-k^2$（補母数）です。この積分の x を$tn(u,k) = \frac{sn(u,\,k)}{cn(u,k)}$に置換しますと、

$$1+x^2 = 1+\left\{\frac{sn(u,k)}{cn(u,k)}\right\}^2 = \frac{cn^2(u,k)+sn^2(u,k)}{cn^2(u,k)} = \frac{1}{cn^2(u,k)}$$

$$1+k'^2x^2 = 1+x^2(1-k^2) = 1+x^2-k^2x^2$$

$$= \frac{cn^2(u,k)}{cn^2(u,k)} + \frac{sn^2(u,k)}{cn^2(u,k)} - k^2\frac{sn^2(u,k)}{cn^2(u,k)} = \frac{cn^2(u,k)+sn^2(u,k)-k^2sn^2(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

$$= \frac{1-k^2sn^2(u,k)}{cn^2(u,k)} = \frac{dn^2(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

です。$x = tn(u,k) = \frac{sn(u,\,k)}{cn(u,k)}$の両辺を u で微分しますと、

$$\frac{dx}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{sn(u,k)}{cn(u,k)}\right) = \frac{sn'(u,k)cn(u,k)-sn(u,k)cn'(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

$$= \frac{cn(u,k)dn(u,k)cn(u,k)+sn(u,k)sn(u,k)dn(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

$$= \frac{cn^2(u,k)dn(u,k)+sn^2(u,k)dn(u,k)}{cn^2(u,k)}$$

$$= \frac{dn\,(u,k)\{cn^2\,(u,k) + sn^2\,(u,k)\}}{cn^2\,(u,k)} = \frac{dn\,(u,k)}{cn^2\,(u,k)}$$

になります。右辺と左辺に du を掛け、

$$dx = \frac{dn(u,k)}{cn^2\,(u,k)}du$$

です。積分下端は、

$0 = tn(u,k)$ が成り立つ u ですから、$u = tn^{-1}(0,k) = 0$ です。

積分上端は、

$x = tn(u,k)$ が成り立つ u ですから、$u = tn^{-1}(x,k)$ です。

8－③式の積分は、以下の様に置換されます。

$$u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2\,x^2)}}dx = \int_0^{tn^{-1}(x,k)} \frac{\frac{dn(u,k)}{cn^2(u,k)}du}{\sqrt{\frac{1}{cn^2(u,k)} \bullet \frac{dn^2(u,k)}{cn^2(u,k)}}}$$

$$= \int_0^{tn^{-1}(x,k)} \frac{\frac{dn(u,k)}{cn^2(u,k)}du}{\sqrt{\frac{dn^2(u,k)}{cn^4(u,k)}}} = \int_0^{tn^{-1}(x,k)} \frac{dn(u,k)}{cn^2(u,k)}du \bullet \frac{cn^2(u,k)}{dn(u,k)}$$

$$= \int_0^{tn^{-1}(x,k)} du = [u]_0^{tn^{-1}(x,k)} = tn^{-1}(x,k)$$

結果は $tn^{-1}(x,k)$ です。積分 8－③式の母数 k' の補母数 k が、tn^{-1} の母数になります。

$$u = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)(1+k'^2\,x^2)}}dx = tn^{-1}(x,k)$$

が証明されました。

(2) sn 関数

ここから、純虚数を変数とするヤコビの楕円関数を考えます。これは次のように考えて定義すれば良いです。sn の逆関数つまり楕円積分、

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = sn^{-1}(x,k)$$

において、母数 k＝0 の場合は三角関数の逆関数、

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1}x\right]_0^x = \sin^{-1}x - \sin^{-1}0 = \sin^{-1}x$$

になります。ここで上端 x を純虚数 jy にしますと、u は上端 jy の関数、

$$u = \int_0^{jy} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\sin^{-1} x\right]_0^{jy} = \sin^{-1} jy - \sin^{-1} 0 = \sin^{-1} jy \quad \cdots 8-④$$

となります。（本章最後の注参照）

$\sin^{-1}$ は sin の逆関数ですから、8－④式は、

$$jy = \sin u \quad \cdots 8-⑤$$

になります。

8－④式の積分において、x＝jΩ に置換します。x＝jΩ の両辺を Ω で微分しますと、

$$\frac{dx}{d\Omega} = \frac{dj\Omega}{d\Omega}$$

$$\frac{dx}{d\Omega} = j$$

$$dx = jd\Omega$$

になります。積分範囲は、

下端：0 = jΩ が成り立つ Ω ですから、0 です。

上端：jy = jΩ が成り立つ Ω ですから、y です。

8－④式の積分で、x＝jΩ に置換しますと、

$$u = \int_0^{jy} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{y} \frac{jd\Omega}{\sqrt{1-(j\Omega)^2}} = \int_0^{y} \frac{jd\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}} = j\int_0^{y} \frac{d\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}}$$

になります。

$$\int_0^{y} \frac{d\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}} = v$$

と置きますと、

$$u = jv \quad \cdots 8-⑥$$

です。8－⑤、8－⑥式から、

$$jy = \sin jv \quad \cdots 8-⑦$$

になります。積分 v を改めて計算しますと、双曲線関数の積分公式に載っており、

$$v = \int_0^{y} \frac{d\Omega}{\sqrt{1+\Omega^2}} = \left[\sinh^{-1} \Omega\right]_0^{y} = \sinh^{-1} y - \sinh^{-1} 0 = \sinh^{-1} y$$

です。$\sinh^{-1}$ は sinh の逆関数ですから、上式を逆に書きなおし、

$$y = \sinh v \quad \cdots 8-⑧$$

になります。この結果、純虚数に対する三角関数と双曲線関数の関係は、8－⑦、8－⑧式

から、

$$\sin jv = j\sinh v$$

であることが分ります。これはオイラーの公式から得られる、sin の複素数表示、

$$\sin jv = \frac{e^{j(jv)} - e^{-j(jv)}}{j2} = \frac{e^{-v} - e^{v}}{j2} = \frac{-(e^{v} - e^{-v})}{j2} = -\left(-j\frac{e^{v} - e^{-v}}{2}\right) = j\sinh v$$

からも明らかです。

上記と全く同じことを第 1 種楕円積分に対して行います。

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = sn^{-1}(x,k) \quad \cdots 8-⑨$$

において、上端 x を純虚数 jy にしますと、u は上端 jy の関数、

$$u = \int_0^{jy} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \left[sn^{-1}(x,k)\right]_0^{jy} = sn^{-1}(jy,k) - sn^{-1}(0,k) = sn^{-1}(jy,k) \quad \cdots 8-⑩$$

となります。（本章最後の注参照） sn^{-1} は sn の逆関数ですから、8－⑩式は、

$$jy = sn(u,k) \quad \cdots 8-⑪$$

になります。

8－⑩式の積分において、x＝jΩ に置換します。x＝jΩ の両辺を Ω で微分しますと、

$$\frac{dx}{d\Omega} = \frac{dj\Omega}{d\Omega}$$

$$\frac{dx}{d\Omega} = j$$

$$dx = jd\Omega$$

になります。積分範囲は、

下端： 0 = jΩ が成り立つ Ω ですから、0 です。

上端： jy = jΩ が成り立つ Ω ですから、y です。

8－⑩式の積分で、x＝jΩ に置換しますと、

$$u = \int_0^{jy} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{y} \frac{jd\Omega}{\sqrt{\{1-(j\Omega)^2\}\{1-k^2(j\Omega)^2\}}} = j\int_0^{y} \frac{d\Omega}{\sqrt{(1+\Omega^2)(1+k^2\Omega^2)}}$$

になります。

$$\int_0^{y} \frac{d\Omega}{\sqrt{(1+\Omega^2)(1+k^2\Omega^2)}} = v$$

と置きますと、

$$u = jv \quad \cdots 8-⑫$$

です。8－⑪、8－⑫式から、

$$jy = sn(u,k) = sn(jv,k) \quad \cdots 8-⑬$$

になります。積分 v を改めて計算しますと、先ほど tn 関数のところで出ました様に、

$$v = \int_0^y \frac{d\Omega}{\sqrt{(1+\Omega^2)(1+k^2\Omega^2)}} = tn^{-1}(y,k')$$

です。積分側の母数が k なので tn^{-1} 側の母数は k' です。tn^{-1} は tn の逆関数なので、上式を逆に書きなおし、

$$y = tn(v,k') \quad \cdots 8-⑭$$

になります。この結果、

$$y = tn(v,k') = \frac{sn(v,k')}{cn(v,k')} \quad \cdots 8-⑮$$

となります。この式を 8－⑬式の、

$$sn(jv,k) = jy$$

に代入しますと、

$$sn(jv,k) = j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')} \quad \cdots 8-⑯$$

を得ます。これが純虚数に対する sn 関数です。8－⑮式の y の変域は $-\infty \leqq y \leqq +\infty$ であり、これに対する v の変域は、$-K' \leqq y \leqq +K'$ です。tan と同様です。K' とは、

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^{\,2}\sin^2\varphi}} = K(k')$$

で表される第 1 種完全楕円積分です。k' は $\sqrt{1-k^2}$ で定義される補母数です。

(3) cn 関数

$sn(jv,k) = j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}$ を用いて cn(jv,k) を計算しますと、

$$cn(jv,k) = \sqrt{1-sn^2(jv,k)} = \sqrt{1-\frac{j^2sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}} = \sqrt{\frac{cn^2(v,k')+sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{cn^2(v,k')}} = \frac{1}{cn(v,k')}$$

になります。

(3) dn 関数

$sn(jv,k) = j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}$ を用いて dn(jv,k) を計算しますと、

$$dn(jv,k)=\sqrt{1-k^2sn^2(jv,k)}=\sqrt{1-\frac{j^2k^2sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}}=\sqrt{\frac{cn^2(v,k')+k^2sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-sn^2(v,k')+k^2sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}}=\sqrt{\frac{1-sn^2(v,k')(1-k^2)}{cn^2(v,k')}}=\sqrt{\frac{1-(1-k^2)sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}}$$

$$=\frac{\sqrt{1-k'^2sn^2(v,k')}}{\sqrt{cn^2(v,k')}}=\frac{dn(v,k')}{cn(v,k')}$$

になります。

9、複素数変数の楕円関数

sn 関数を複素数変数へ拡張するには、加法定理を適用して定義します。u,v を実数としますと、

$$sn(u+jv,k)=\frac{sn(u,k)cn(jv,k)dn(jv,k)+cn(u,k)dn(u,k)sn(jv,k)}{1-k^2sn^2(u,k)sn^2(jv,k)}$$

$$=\frac{sn(u,k)\frac{1}{cn(v,k')}\frac{dn(v,k')}{cn(v,k')}+jcn(u,k)dn(u,k)\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}}{1-k^2sn^2(u,k)\left\{j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}\right\}^2}$$

分子分母に$cn^2(v,k')$をかけ、

$$=\frac{cn^2(v,k')sn(u,k)\frac{dn(v,k')}{cn^2(v,k')}+jcn^2(v,k')cn(u,k)dn(u,k)\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}}{cn^2(v,k')\left\{1+k^2sn^2(u,k)\frac{sn^2(v,k')}{cn^2(v,k')}\right\}}$$

$$=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{cn^2(v,k')+k^2sn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

$$=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-sn^2(v,k')+k^2sn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

$$=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-sn^2(v,k')\{1-k^2sn^2(u,k)\}}$$

$$=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

になります。

同様に、

$$cn(u+jv,k)=\frac{cn(u,k)cn(jv,k)-sn(u,k)sn(jv,k)dn(u,k)dn(jv,k)}{1-k^2sn^2(u,k)sn^2(jv,k)}$$

$$= \frac{\mathrm{cn}(u,k)\dfrac{1}{\mathrm{cn}(v,k')} - \mathrm{jsn}(u,k)\dfrac{\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}\mathrm{dn}(u,k)\dfrac{\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\left\{\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}\right\}^2}$$

$$= \frac{\mathrm{cn}^2(v,k')\mathrm{cn}(u,k)\dfrac{1}{\mathrm{cn}(v,k')} - \mathrm{jcn}^2(v,k')\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\dfrac{\mathrm{sn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}}{\mathrm{cn}^2(v,k')\left\{1+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\dfrac{\mathrm{sn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}\right\}}$$

$$= \frac{\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k') - \mathrm{jsn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k') + k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}$$

$$= \frac{\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k') - \mathrm{jsn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k')}{1-\mathrm{sn}^2(v,k') + k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}$$

$$= \frac{\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k') - \mathrm{jsn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k')}{1-\mathrm{sn}^2(v,k')\{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\}}$$

$$= \frac{\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k') - \mathrm{jsn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k')}{1-\mathrm{dn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}$$

になります。

さらに、

$$\mathrm{dn}(u+\mathrm{j}v,k) = \frac{\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{dn}(\mathrm{j}v,k) - k^2\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{sn}(\mathrm{j}v,k)\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{cn}(\mathrm{j}v,k)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(\mathrm{j}v,k)}$$

$$= \frac{\mathrm{dn}(u,k)\dfrac{\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')} - \mathrm{j}k^2\mathrm{sn}(u,k)\dfrac{\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}\mathrm{cn}(u,k)\dfrac{1}{\mathrm{cn}(v,k')}}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\left\{\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}\right\}^2}$$

$$= \frac{\mathrm{cn}^2(v,k')\mathrm{dn}(u,k)\dfrac{\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')} - \mathrm{j}k^2\mathrm{cn}^2(v,k')\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(u,k)\dfrac{\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}}{\mathrm{cn}^2(v,k')\left\{1+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\dfrac{\mathrm{sn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}\right\}}$$

$$= \frac{\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k') - \mathrm{j}k^2\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k') + k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}$$

$$= \frac{\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k') - \mathrm{j}k^2\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')}{1-\mathrm{sn}^2(v,k') + k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}$$

$$= \frac{\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k') - \mathrm{j}k^2\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')}{1-\mathrm{sn}^2(v,k')\{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\}}$$

$$= \frac{\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{cn}(v,k')\mathrm{dn}(v,k') - \mathrm{j}k^2\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')}{1-\mathrm{dn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}$$

となります。

これらが複素数変数のヤコビ楕円関数の定義です。

10、複素平面上の sn 関数

複素数変数のヤコビ楕円関数を得ました。まず sn について考えます。実軸上では、

$$sn(u+2K) = -snu \quad \cdots\cdots 10-①$$

$$sn(u+4K) = snu \quad \cdots\cdots 10-②$$

であり、sn は周期 4K を持ちます。特定の点における値は、

u	0	K	2K	3K	4K
sn u	0	1	0	−1	0

です。10−①、②式は u が複素数の場合でも成り立ちます。複素変数に対して sn は周期 4K を持ちます。

虚軸上での sn は、

$$sn(jv,k) = j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}$$

で与えられます。v が実数の時、すなわち虚軸上で sn は純虚数です。v を 2K'だけ進めますと、

$$sn(jv + j2K',k) = j\frac{sn(v+2K',k')}{cn(v+2K',k')}$$

になります。右辺で母数はk'ですから、

$$sn(v+2K',k') = -sn(v,k')$$

$$cn(v+2K',k') = -cn(v,k')$$

となります。したがって、

$$sn(jv + j2K',k) = j\frac{sn(v+2K',k')}{cn(v+2K',k')} = j\frac{-sn(v,k')}{-cn(v,k')} = sn(jv,k)$$

となり、虚軸上で sn は周期 $j2K'$ を持ちます。

また、

$$sn(jv,k) = j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}$$

で$v = K'$とおくと、$cn(K',k') = 0$ より、

$$sn(jK',k) = \infty$$

となります。

複素数変数の加法定理、

$$sn(u+jv,k)=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

で $v=K'$ と置きますと、

$sn(K',k')=1$、$cn(K',k')=0$、$dn(K',k')=\sqrt{1-k'^2\,sn(K',k')}=\sqrt{1-k'^2}=k$ ですので、

$$sn(u+jK',k)=\frac{sn(u,k)dn(K',k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(K',k')cn(K',k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(K',k')}$$

$$=\frac{sn(u,k)\bullet k}{1-dn^2(u,k)}=\frac{sn(u,k)\bullet k}{1-\{1-k^2sn^2(u,k)\}}=\frac{sn(u,k)\bullet k}{1-1+k^2sn^2(u,k)}=\frac{sn(u,k)\bullet k}{k^2sn^2(u,k)}=\frac{1}{ksn(u,k)}$$

になります。

複素数変数の加法定理、

$$sn(u+jv,k)=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

で $v=2K'$ と置きますと、

$sn(2K',k')=0$、$cn(2K',k')=-1$、$dn(2K',k')=\sqrt{1-k'^2\,sn(2K',k')}=\sqrt{1}=1$ ですので、

$$sn(u+j2K',k)=\frac{sn(u,k)dn(2K',k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(2K',k')cn(2K',k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(2K',k')}$$

$$=\frac{sn(u,k)}{1}=sn(u,k)$$

になります。u はもとに戻ってしまいます。これは u が複素数の場合でも成り立ちます。複素数変数に対して sn は周期 $j2K'$ を持ちます。

複素数変数の sn 加法定理、

$$sn(u+jv,k)=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

で $u=u+K$、$v=K'$ と置きますと、

$sn(K',k')=1$、$cn(K',k')=0$、$dn(K',k')=\sqrt{1-k'^2\,sn(K',k')}=\sqrt{1-k'^2}=k$、

$sn(u+K)=\frac{snucnKdnK+snKcnudnu}{1-k^2sn^2usn^2K}=\frac{cnudnu}{1-k^2sn^2u}=\frac{cnudnu}{dn^2u}=\frac{cnu}{dnu}$ ですので、

$$sn(u+K+jK',k)=\frac{sn(u+K,k)dn(K',k')+jcn(u+K,k)dn(u+K,k)sn(K',k')cn(K',k')}{1-dn^2(u+K,k)sn^2(K',k')}$$

$$=\frac{sn(u+K,k)\bullet k}{1-dn^2(u+K,k)}=\frac{sn(u+K,k)\bullet k}{1-\{1-k^2sn^2(u+K,k)\}}=\frac{sn(u+K,k)\bullet k}{1-1+k^2sn^2(u+K,k)\}}=\frac{sn(u+K,k)\bullet k}{k^2sn^2(u+K,k)}$$

$$=\frac{1}{ksn(u+K,k)}=\frac{1}{\frac{kcnu}{dnu}}=\frac{dn(u,k)}{kcn(u,k)}$$

となります。以上をまとめますと下表になります。

変数	u＋jK’	u＋j2K’	u＋j3K’	u＋j4K’	u＋K＋jK’	u＋2K＋j2K’
sn 値	$\frac{1}{ksnu}$	sn u	$\frac{1}{ksnu}$	sn u	$\frac{dnu}{kcnu}$	－sn u

u の特別な値における関数値を求めます。

$$sn(u+jv,k)=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

で$u+jv=0+j\frac{K'}{2}$と置きますと、

$$sn(0+j\frac{K'}{2},k)=\frac{sn(0,k)dn(\frac{K'}{2},k')+jcn(0,k)dn(0,k)sn(\frac{K'}{2},k')cn(\frac{K'}{2},k')}{1-dn^2(0,k)sn^2(\frac{K'}{2},k')}$$

$$=\frac{jsn(\frac{K'}{2},k')cn(\frac{K'}{2},k')}{1-sn^2(\frac{K'}{2},k')}=\frac{jsn(\frac{K'}{2},k')cn(\frac{K'}{2},k')}{cn^2(\frac{K'}{2},k')}=j\frac{sn(\frac{K'}{2},k')}{cn(\frac{K'}{2},k')}$$

です。半数公式によれば、$sn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-cnu}{1+dnu}}$ 、$cn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+dnu}}$ です。$u=K'$の場合、$sn(K',k')=1$、$cn(K',k')=0$ 、$dn(K',k')=\sqrt{1-k'^2sn^2(K',k')}=\sqrt{1-k'^2}=k$ ですから、

$$= \frac{j\sqrt{\frac{1-0}{1+k}}}{\sqrt{\frac{k+0}{1+k}}} = j\frac{1}{\sqrt{1+k}} \bullet \frac{\sqrt{1+k}}{\sqrt{k}} = j\frac{1}{\sqrt{k}}$$

となります。0＜k＜1 です。（根号計算）

$$sn(u+jv,k) = \frac{sn(u,k)dn(v,k') + jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

で$u+jv = K+j\frac{K'}{2}$と置きますと、

$$sn(K+j\frac{K'}{2},k) = \frac{sn(K,k)dn(\frac{K'}{2},k') + jcn(K,k)dn(K,k)sn(\frac{K'}{2},k')cn(\frac{K'}{2},k')}{1-dn^2(K,k)sn^2(\frac{K'}{2},k')}$$

です。半数公式によれば、

$sn\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-cnu}{1+dnu}}$ 、 $cn\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+dnu}}$ 、 $dn\frac{u}{2} = \sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+cnu}}$ です。$u = K'$の

場合、$sn(K',k') = 1$、$cn(K',k') = 0$ 、$dn(K',k') = \sqrt{1-k'^2 sn^2(K',k')} = \sqrt{1-k'^2} = k$

ですから、$sn(\frac{K'}{2},k') = \sqrt{\frac{1}{1+k}}$ 、$cn(\frac{K'}{2},k') = \sqrt{\frac{k}{1+k}}$ 、$dn(\frac{K'}{2},k') = \sqrt{k}$ となります。

$u = K$ の場合、$sn(K,k) = 1$、$cn(K,k) = 0$ 、$dn(K,k) = \sqrt{1-k^2 sn(K,k)} = \sqrt{1-k^2} = k'$

です。これらを代入しますと、

$$sn(K+j\frac{K'}{2},k) = \frac{\sqrt{k}}{1-\frac{k'^2}{1+k}} = \frac{\sqrt{k}}{\frac{1+k-k'^2}{1+k}} = \frac{\sqrt{k}(1+k)}{1+k-(1-k^2)} = \frac{\sqrt{k}(1+k)}{1+k-1+k^2} = \frac{\sqrt{k}(1+k)}{k+k^2}$$

$$= \frac{\sqrt{k}(1+k)}{k(1+k)} = \frac{\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

になります。

$$sn(u+jv,k) = \frac{sn(u,k)dn(v,k') + jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

で$u+jv=2K+j\frac{K'}{2}$と置きますと、

$$sn(2K+j\frac{K'}{2},k)=\frac{sn(2K,k)dn(\frac{K'}{2},k')+jcn(2K,k)dn(2K,k)sn(\frac{K'}{2},k')cn(\frac{K'}{2},k')}{1-dn^2(2K,k)sn^2(\frac{K'}{2},k')}$$

です。半数公式によれば、

$sn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-cnu}{1+dnu}}$ 、$cn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+dnu}}$ 、$dn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+cnu}}$ です。$u=K'$の場合、$sn(K',k')=1$、$cn(K',k')=0$ 、$dn(K',k')=\sqrt{1-k'^2\,sn(K',k')}=\sqrt{1-k'^2}=k$ ですから、$sn(\frac{K'}{2},k')=\sqrt{\frac{1}{1+k}}$ 、$cn(\frac{K'}{2},k')=\sqrt{\frac{k}{1+k}}$ 、$dn(\frac{K'}{2},k')=\sqrt{k}$ となります。

$u=2K$の場合、$sn(2K,k)=0$ 、$cn(2K,k)=-1$、$dn(2K,k)=\sqrt{1-k^2sn^2(2K,k)}=1$ です。これらを代入すれば、

$$sn(2K+j\frac{K'}{2},k)=\frac{-j\sqrt{\frac{1}{1+k}}\sqrt{\frac{k}{1+k}}}{1-\frac{1}{1+k}}=\frac{\frac{-j\sqrt{k}}{1+k}}{\frac{k}{1+k}}=\frac{-j\sqrt{k}}{1+k}\bullet\frac{1+k}{k}=\frac{-j\sqrt{k}}{k}=\frac{-j}{\sqrt{k}}$$

となります。

$$sn(u+jv,k)=\frac{sn(u,k)dn(v,k')+jcn(u,k)dn(u,k)sn(v,k')cn(v,k')}{1-dn^2(u,k)sn^2(v,k')}$$

で$u+jv=3K+j\frac{K'}{2}$と置きますと、

$$sn(3K+j\frac{K'}{2},k)=\frac{sn(3K,k)dn(\frac{K'}{2},k')+jcn(3K,k)dn(3K,k)sn(\frac{K'}{2},k')cn(\frac{K'}{2},k')}{1-dn^2(3K,k)sn^2(\frac{K'}{2},k')}$$

です。半数公式によれば、

$sn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{1-cnu}{1+dnu}}$ 、$cn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+dnu}}$ 、$dn\frac{u}{2}=\sqrt{\frac{dnu+cnu}{1+cnu}}$ です。$u=K'$の

場合、$sn(K',k')=1$、$cn(K',k')=0$ 、$dn(K',k')=\sqrt{1-k'^2\,sn^2(K',k')}=\sqrt{1-k'^2}=k$

ですから、$sn(\frac{K'}{2},k')=\sqrt{\frac{1}{1+k}}$ 、$cn(\frac{K'}{2},k')=\sqrt{\frac{k}{1+k}}$ 、$dn(\frac{K'}{2},k')=\sqrt{k}$ となりま

す。$u=3K$ の場合、$sn(3K,k)=-1$ 、$cn(3K,k)=0$ 、

$dn(3K,k)=\sqrt{1-k^2sn^2(3K,k)}=\sqrt{1-k^2}=k'$ です。これらを代入しますと、

$$sn(3K+j\frac{K'}{2},k)=\frac{-\sqrt{k}}{1-\frac{k'^2}{1+k}}=\frac{-\sqrt{k}}{\frac{1+k-(1-k^2)}{1+k}}=\frac{-\sqrt{k}(1+k)}{k(1+k)}=\frac{-\sqrt{k}}{k}=\frac{-1}{\sqrt{k}}$$

になります。

以上をまとめると以下の表になります。

u の特別な値における snu 値

u の虚数値	2jK’	0	1	0	−1	0
	jK’	∞	$\frac{1}{k}$	∞	$\frac{-1}{k}$	∞
	$j\frac{K'}{2}$	$\frac{j}{\sqrt{k}}$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\frac{-j}{\sqrt{k}}$	$\frac{-1}{\sqrt{k}}$	$\frac{j}{\sqrt{k}}$
	0	0	1	0	−1	0
		0	K	2 K	3K	4K
		u の実数値				

u と snu を別の複素平面で表すことにします。u が u 平面をコの字の左下からスタートして移動する時の、snu 平面の snu の値の変化を考えます。

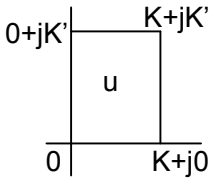
①u が実数の 0→$K+j0$ で、snu は 0→1

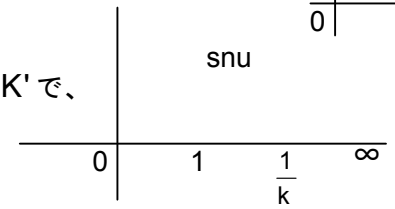
②u が実数から複素数の$K+j0 \rightarrow K+jK'$ で、

snu は実数の 1→$\frac{1}{k}$

③u が複素数から純虚数の$K+jK' \rightarrow 0+jK'$ で、

snu は実数の $\frac{1}{k} \rightarrow \infty$





u がコの字の左下からスタートして移動する時、snu は実軸上を 0→∞まで動くことが分ります。逆に言えば、sn u が実軸上を動く時 u は実数および複素数になります。

11、sn 関数による写像

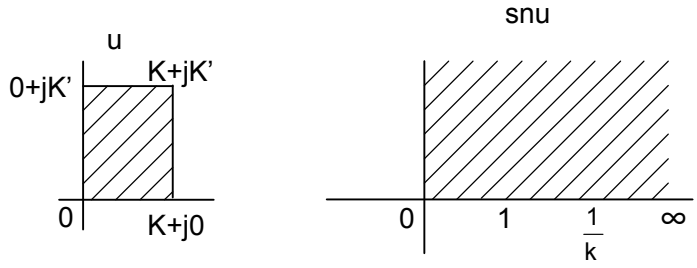
写像とは、平面上の 1 点をもう一つの平面上の 1 点に移すことです。

上記①～③に次の④を加え、u の移動をロの字にします。

④u が純虚数の $0+jK'\rightarrow 0$ で、snu は虚軸上を∞→0 へ戻る。

u が u 平面の長方形、$0\rightarrow K+j0\rightarrow K+jK'\rightarrow 0+jK'\rightarrow 0$ の周上を移動する時、snu は実軸上を $0\rightarrow 1\rightarrow \frac{1}{k}\rightarrow\infty$ と進んだ後、虚軸上を∞→0 へ帰ります。

したがって u 平面の 0、$K+j0$、$K+jK'$、$0+jK'$、0 を頂点とする長方形の内部（例えば $u=\frac{K}{2}+j\frac{K'}{2}$ 等々）は、snu 平面の第 1 象限に写像されることが分ります。



12、2 重周期関数

snu は実数の周期 4K と虚数の周期 j2K' を持つことを知りました。したがって、

$$sn(u+4K+j2K',k)=sn(u,k)$$

を得ます。m、n を整数（0 およびプラスとマイナスの自然数）として、

$$sn(u+4mK+j2nK',k)=sn(u,k)$$

です。

この場合 4K、j2K' を一対の基本周期と言い、このような関数を 2 重周期関数と言います。

2 重周期性によって、実部が 0～4K、虚部が 0～ j2K' の範囲だけで sn u の性質を調べれば十分です。この範囲を sn の基本周期平行四辺形と言います。

実軸に平行で jK' を通る直線上では、

$$sn(u+jK',k)=\frac{1}{ksn(u,k)}$$

となります。したがって、sn の値は実数です。

また、$sn(u+2K,k)=-sn(u,k)$ により、

$$sn(2K+jv,k) = -sn(jv,k) = -j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}$$

となります。したがって、虚軸に平行で 2K を通る直線上では、sn の値は純虚数です。

また、

$$sn(u+K,k) = \frac{sn(u,k)cn(K,k)dn(K,k)+sn(K,k)cn(u,k)dn(u,k)}{1-k^2sn^2(u,k)sn^2(K,k)}$$

$$= \frac{cn(u,k)dn(u,k)}{1-k^2sn^2(u,k)} = \frac{cn(u,k)dn(u,k)}{dn^2(u,k)} = \frac{cn(u,k)}{dn(u,k)}$$

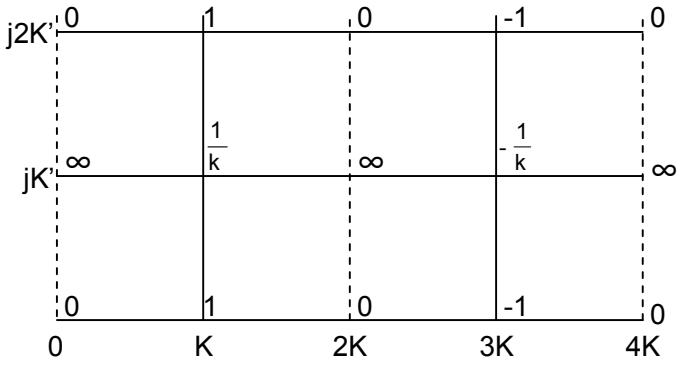
但し、$sn(K,k)=1 \qquad cn(K,k)=0$

ですので、

$$sn(K+jv,k) = \frac{cn(jv,k)}{dn(jv,k)} = \frac{\dfrac{1}{cn(v,k')}}{\dfrac{dn(v,k')}{cn(v,k')}} = \frac{1}{dn(v,k')}$$

となります。したがって、虚軸に平行で K を通る直線上では sn の値は実数です。

これらのことを下図に示しました。



sn の基本周期平行四辺形と特定の点における値

実線上で sn は実数、破線上で sn は純虚数

注：定積分の性質

定積分 $\int_a^b f(*)d*$ の値は、下端 a と上端 b および関数 $f(*)$ によって決まるものです。$*$ のところを x にしても、t にしても、他の文字にしても関係ありません。すなわち、

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(*)d*$$

です。下端 a と上端 b が定数の場合は、

$$\int_a^b f(*)d* = F(b) - F(a)$$

で 1 つの定数を表します。ところが、上端が変数 x になり、

$$\int_a^x f(*)d* = F(x) - F(a)$$

という定積分の場合、その値は上端 x によって決まるので

$$\int_a^x f(*)d*$$

は、上端 x の関数になります。

目次へ戻る