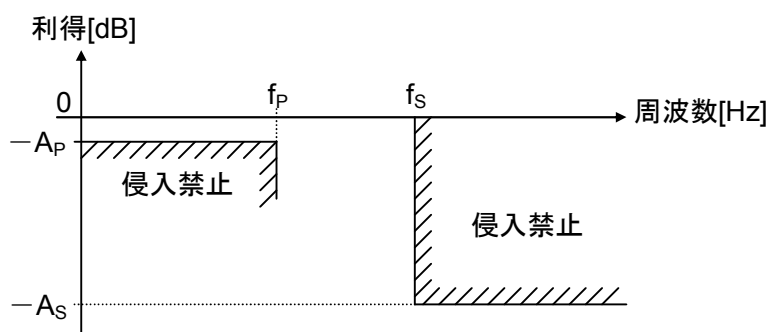


連立チェビシェフフィルタ設計ソフトを作る場合の、ユーザーとのインターフェースを考えます。「楕円関数の数値計算」の章もご参照下さい。



ユーザーの希望するフィルタの仕様は、上図の様なものです。

0[Hz]から f_P [Hz]までの、通過域における減衰の許容最大値は、 $-A_P$ [dB]と指示されます。

阻止域である f_S [Hz]以上での減衰の許容最小値は、 $-A_S$ [dB]と指示されます。

1、コンピューターへの入力依頼

ユーザーに、

通過域端周波数 f_P [Hz]

阻止域先端周波数 f_S [Hz]

通過域許容最大減衰量 $-A_P$ [dB]

阻止域許容最小減衰量 $-A_S$ [dB]

を入力して頂きます。コンピューター内部では、周波数を 2π 倍した角周波数 $2\pi f$ [rad/sec]で計算することにします。連立チェビシェフフィルタの設計でも、各周波数は生（なま）のものをういないで、スケーリングを行い、正規化角周波数で実行します。（スケーリングの章を参照下さい。）

他のフィルタでは、 $\frac{1[\text{rad/sec}]}{\text{通過域端角周波数}[\text{rad/sec}]}$ を縮尺として使用しますが、連立チェ

ビシェフフィルタでは、これを縮尺にしません。

連立チェビシェフフィルタでは通過域端角周波数の逆数が、阻止域先端角周波数になるからです。この縮尺を使用して正規化しますと、通過域端角周波数は $1[\text{rad/sec}]$ になります。すると阻止域の先端角周波数も $1[\text{rad/sec}]$ になってしまい、過渡域が無くなり困るので

す。

既に 3 次および 4 次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、

$$\frac{1[\text{rad/sec}]}{2\pi\sqrt{\text{通過域端生角周波数} \cdot \text{阻止域先端生角周波数} [\text{rad/sec}]}$$

を縮尺として使用します。したがって、

$$\text{正規化角周波数} = \text{生角周波数} \times \text{縮尺}$$

です。例えば、通過域端周波数 f_p [Hz] の正規化角周波数 ω_p [rad/sec] は、

$$\omega_p = 2\pi f_p \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{f_p \cdot f_s}} = \frac{\sqrt{f_p} \cdot \sqrt{f_p}}{\sqrt{f_p} \cdot \sqrt{f_s}} = \sqrt{\frac{f_p}{f_s}} [\text{rad/sec}]$$

です。阻止域先端周波数 f_s [Hz] の正規化角周波数 ω_s [rad/sec] は、

$$\omega_s = 2\pi f_s \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{f_p \cdot f_s}} = \frac{\sqrt{f_s} \cdot \sqrt{f_s}}{\sqrt{f_p} \cdot \sqrt{f_s}} = \sqrt{\frac{f_s}{f_p}} [\text{rad/sec}]$$

になります。

2、 Ω_s の提示

ユーザーが指定した阻止域先端生周波数 f_s [Hz] を、通過域端生周波数 f_p [Hz] で割った、

$\frac{\text{阻止域先端周波数 } f_s [\text{Hz}]}{\text{通過域端周波数 } f_p [\text{Hz}]}$ を Ω_s (ラジオメガエス) と呼びます。

この値を、参考値として表示します。フィルターの鋭さの指標です。小さいほど鋭いフィルターです。鋭いとは、通過域端から阻止域先端までが短いということです。

3、次数の計算と提示

次数 n を求め、ユーザーに提示しなければなりません。次数 n の求め方は以下の通りです。まず原理を復習した後、実際の決定作業の詳細を述べます。

(1) 原理

q を通じて計算を行いますと、仕様に合った連立チェビシェフフィルターの次数を、簡単に求めることが出来ます。 q は、

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

です。K（ラージケー）は、k（スモールケー）を母数とする、第一種完全楕円積分値です。

k は、過渡帯域の幅 b から決定されます。K'（ラージケーダッシュ）は、k の副母数 k'（スモールケーダッシュ）を母数とする、第一種完全楕円積分値です。

q_1 は通過域のうねりである、m から決定されます。 $m = \sqrt{k_1}$ の k_1 から q_1 を求めれば、

$$q_1 = e^{-\pi \frac{K_1'}{K_1}}$$

です。 K_1 は、 k_1 を母数とする、第一種完全楕円積分値です。 K_1' は、 k_1 の副母数 k_1' を母数とする、第一種完全楕円積分値です。

連立チェビシェフフィルターの、過渡域（通過域端から阻止域先端まで）の幅と許容うねりの関係式、

$$n \frac{K'}{K} = \frac{K_1'}{K_1}$$

から、

$$e^{-\pi n \frac{K'}{K}} = e^{-\pi \frac{K_1'}{K_1}}$$

が成り立ち、q と q_1 の定義から、

$$q^n = q_1$$

になります。両辺を 10 を底とする対数にしますと、

$$\text{Log}_{10} q^n = \text{Log}_{10} q_1$$

$$n \text{Log}_{10} q = \text{Log}_{10} q_1$$

$$n = \frac{\text{Log}_{10} q_1}{\text{Log}_{10} q}$$

となり、n が分ります。これが、ユーザーが決めた仕様からフィルターの次数を求める式です。n は小数で出て来ますが、これを切り上げ、整数にすればフィルターの次数となります。

q と q_1 の求め方は、「楕円関数の数値計算」の章、3 をご覧下さい。

(2)実際の決定作業の詳細

ユーザーの要求仕様は次の 3 つにまとめられます。

- ①、通過域での許容最大減衰値、 $-A_P$ の仕様
- ②、阻止域での許容最小減衰値、 $-A_S$ の仕様
- ③、通過域端周波数 f_P [Hz] と阻止域先端周波数 f_S [Hz] から得られる、過渡域の幅

まずユーザーの要求仕様から、 $m^2 = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_p}{10}} - 1}{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}$ で、仮の $m^2 = k_1$ を求めます。この式につ

いて説明致します。

ユーザーの要求仕様、「通過域での許容最大減衰値」（通過域うねりの許容値）を負の数 $-A_p[\text{dB}]$ とします。通過域うねり最大減衰地点での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_p = 20 \log_{10} \frac{\text{OUT}}{\text{IN}} [\text{dB}]$$

$$\log_{10} \frac{\text{OUT}}{\text{IN}} = \frac{-A_p}{20}$$

$$\frac{\text{OUT}}{\text{IN}} = 10^{\frac{-A_p}{20}}$$

$$\frac{\text{IN}}{\text{OUT}} = \frac{1}{10^{\frac{-A_p}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_p}{20}} \right)^{-1} = 10^{\frac{A_p}{20}}$$

となります。周波数伝達関数の絶対値は、 $\frac{1}{\sqrt{1 + H^2 f^2(\omega)}}$ です。両者を等しいと置きますと、

$$\frac{1}{\sqrt{1 + H^2 f^2(\omega)}} = \frac{\text{OUT}}{\text{IN}}$$

$$\frac{1}{1 + H^2 f^2(\omega)} = \frac{\text{OUT}^2}{\text{IN}^2}$$

$$1 + H^2 f^2(\omega) = \left(\frac{\text{IN}}{\text{OUT}} \right)^2$$

$$H^2 f^2(\omega) = \left(\frac{\text{IN}}{\text{OUT}} \right)^2 - 1$$

$$H^2 f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_p}{20}} \right)^2 - 1$$

$$H^2 f^2(\omega) = 10^{\frac{A_p}{10}} - 1$$

になります。通過域最大減衰地点で、 H を含めた元関数 $f(\omega)$ の 2 乗値が取べき、ユーザー仕様からの要求値です。

次に、ユーザーの要求仕様、「阻止域での許容最小減衰値」を負の数 $-A_s[\text{dB}]$ としますと、阻止域うねり最小減衰地点での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_s = 20 \log_{10} \frac{OUT}{IN} [dB]$$

$$\log_{10} \frac{OUT}{IN} = \frac{-A_s}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN} = 10^{\frac{-A_s}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT} = \frac{1}{10^{\frac{-A_s}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_s}{20}} \right)^{-1} = 10^{\frac{A_s}{20}}$$

となります。周波数伝達関数の絶対値は $\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ です。両者を等しいと置きますと

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)} = \frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT} \right)^2$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT} \right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_s}{20}} \right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_s}{10}} - 1$$

になります。阻止域最小減衰地点で、H を含めた元関数 $f(\omega)$ の 2 乗値が取べき、ユーザー仕様からの要求値です。

通過域最大減衰地点および阻止域最小減衰地点で、元関数 $f(\omega)$ の 2 乗値、 $f^2(\omega_1)$ および $f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right)$ が取ることの出来る値は、 m^2 および $\frac{1}{m^2}$ です。したがって、H を含めた元関数 $f(\omega)$

の 2 乗値が取べき値の、連立方程式が次の様に成り立ちます。

$$H^2m^2 = 10^{\frac{A_p}{10}} - 1 \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$H^2 \frac{1}{m^2} = 10^{\frac{A_s}{10}} - 1 \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

②を変形して、

$$m^2 = \frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}$$

となります。この式を①に代入しますと、

$$\begin{aligned} H^2 \frac{H^2}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} &= 10^{\frac{A_P}{10}} - 1 \\ H^4 &= \left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right) \left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right) \\ H^2 &= \sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right) \left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)} \end{aligned}$$

になります。この H^2 を①に代入しますと、

$$m^2 = \frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right) \left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

になります。また、②に代入しても、

$$m^2 = \frac{\sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right) \left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

が成り立ちます。これは、通過域での最大減衰値と阻止域での最小減衰値の両方が、ユーザーの仕様通りのフィルターを作る場合の、 H の値と、 H を含めない元関数 $f(\omega)$ の取るべき通過域でのうねりの大きさ m です。

上で求めた H^2 と m^2 をかけますと、通過域最大減衰値と阻止域最小減衰値の両方が、ユーザー仕様通りになることが分ります。以下の通りです。

$$H^2 m^2 = \sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right) \left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)} \cdot \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

$$= \frac{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}} - 1} \sqrt{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} \sqrt{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

$$= 10^{\frac{A_P}{10}} - 1$$

$$H^2 \frac{1}{m^2} = \frac{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}} - 1} \sqrt{10^{\frac{A_S}{10}} - 1} \sqrt{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}}$$

$$= 10^{\frac{A_S}{10}} - 1$$

こうして、仮の $m^2=k_1$ と仮の H が、

$$m^2 = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

$$H^2 = \sqrt{(10^{\frac{A_P}{10}} - 1)(10^{\frac{A_S}{10}} - 1)}$$

となりました。仮の $m^2=k_1$ から仮の q_1 を計算します。仮の q_1 の計算方法は、

$$k_1' = \sqrt{1 - k_1^2}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \bullet \frac{1 - \sqrt{k_1'}}{1 + \sqrt{k_1'}}$$

$$q_1 = \lambda_1 + 2\lambda_1^5 + 15\lambda_1^9 + 150\lambda_1^{13} + 1707\lambda_1^{17} + 20910\lambda_1^{21} + 268616\lambda_1^{25}$$

です。次に、ユーザーの要求仕様から q を計算します。

3次および4次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、通過域の最大許容減衰値を離れる場所を、正規化角周波数で b と指定しました。

b とは、本章の始めに出てきました ω_P と同じです。 b^2 は k でした。したがって、 ω_P^2 が k となります。

$$\omega_P = 2\pi f_P \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{f_P \cdot f_S}} = \frac{\sqrt{f_P} \cdot \sqrt{f_P}}{\sqrt{f_P} \cdot \sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{f_P}{f_S}}$$

でしたので、

$$\omega_P^2 = \frac{f_P}{f_S} = k$$

となります。したがって k は、ユーザーに提示した Ω_S （ラジオメガエス）の逆数になります。 k から q を計算します。 q の計算方法は、

$$k' = \sqrt{1-k^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$$

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 20910\lambda^{21} + 268616\lambda^{25}$$

です。仮の q_1 の値と q の値を、先程の n の式、

$$n = \text{Log}_q q_1 = \frac{\text{Log}_{10} q_1}{\text{Log}_{10} q}$$

に代入し、 n を計算します。 n は小数で出ますが、小数点以下を切り上げ、整数の次数に直します。回路を作る場合、整数の次数しか作れないからです。

4、ユーザー仕様と設計値のすり合わせ

整数の次数が決定しました。整数の次数でのフィルターは、ユーザーの要求する仕様とは違う物になります。もともと連立チェビシェフフィルターには、 $q^n = q_1$ という制約があるため、 k と k_1 は互いに独立には決められません。要求仕様をまとめた3つのパラメーターは、任意の2つを指定すると、他の1つは向こうから定まってしまう。さりとて3つのパラメーターが無ければ、最低線が決まらず次数の計算も出来なかったのです。

2つの指定と、それにより決まってしまう1つの組み合わせは、以下の通りです。

(イ)、 $-A_P$ と k を指定した場合

k を指定すれば、 k と同時に m が決まってしまう。 m が決まれば、それを指定された $-A_P$ にあわせるための、 H が決まってしまう。すると $-A_S$ は任意に指定できず、 $\frac{1}{m}$ と H で決まる値に定まってしまう。

(ロ)、 $-A_P$ と $-A_S$ を指定した場合

m と H が先に決定し、k が自動的に決まってしまう。

(ハ)、 $-A_S$ と k を指定した場合

k を指定すれば、k と同時に m が決まってしまう。m が決まれば $\frac{1}{m}$ も決まり、

それを指定された $-A_S$ にあわせるための、H が決まってしまう。すると、 $-A_P$ は任意に指定できず、m と H で決まる値に定まってしまう。

現在、整数の n が決定されたところです。整数の次数 n を提示した後、ユーザーに次の 3 つを提示します。ユーザーとのすり合わせです。

- ①、 $-A_P$ と Ω_S を、ユーザーの仕様通りにした場合の、 $-A_S$ を提示します。n の少数以下を切り上げた為、ユーザーの仕様より必ずその絶対値が大きくなる $-A_S$ を、「 $-A_P$ と Ω_S が仕様と同じなら、 $-A_S$ がこの大きさになります。」と提示します。
- ②、 $-A_P$ と $-A_S$ を、ユーザーの仕様通りにした場合の、 Ω_S を提示します。n の少数以下を切り上げた為、ユーザーの仕様より必ず小さくなる Ω_S を、「 $-A_P$ と $-A_S$ が仕様と同じなら、 Ω_S をここまで下げられます。」と提示します。
- ③、 $-A_S$ と Ω_S を、ユーザーの仕様通りにした場合の、 $-A_P$ を提示します。n の少数以下を切り上げた為、ユーザーの仕様より必ずその絶対値が小さくなる $-A_P$ を、「 $-A_S$ と Ω_S が仕様と同じなら、 $-A_P$ をここまで下げられます。」と提示します。

①～③の、それぞれの計算方法を説明致します。

①、 $-A_P$ と Ω_S が指定された場合、整数の n での $-A_S$ を求める方法。

ユーザー要求仕様の k から q を計算します。

3 次および 4 次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、通過域の最大許容減衰値を離れる場所を、正規化角周波数で b と指定しました。b とは、本章の始めに出てきました ω_P と同じです。b² は k でした。したがって、 ω_P^2 が k となります。

$$\omega_P = 2\pi f_P \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{f_P \cdot f_S}} = \frac{\sqrt{f_P} \cdot \sqrt{f_P}}{\sqrt{f_P} \cdot \sqrt{f_S}} = \sqrt{\frac{f_P}{f_S}}$$

でしたので、

$$\omega_P^2 = \frac{f_P}{f_S} = k$$

となります。したがって k は、ユーザーに提示した Ω_S (ラジオメガエス) の逆数になります。k から q を計算します。q の計算方法は、

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 20910\lambda^{21} + 268616\lambda^{25}$$

です。 $q^n = q_1$ ですから、 q^n の n に整数の次数を代入すれば、整数の次数に対する q_1 が求まります。この q_1 から $k_1 = m^2$ を求めます。 q_1 から $k_1 = m^2$ の求め方は、 k_1 から q_1 を求めた時と反対の計算を行います。まず λ_1 を q_1 から求めます。「楕円関数の数値計算」の章、3 で書きました通り、

$$\lambda_1 = q_1 - 2q_1^5 + 5q_1^9 - 10q_1^{13} + 18q_1^{17} - 32q_1^{21} + 55q_1^{25} - \dots$$

です。次に、 λ_1 から k_1' を求めます。 λ_1 の式を変形しますと、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k_1'}}{1 + \sqrt{k_1'}} = \lambda_1$$

$$1 - \sqrt{k_1'} = 2\lambda_1 + 2\lambda_1\sqrt{k_1'}$$

$$1 - 2\lambda_1 = \sqrt{k_1'}(1 + 2\lambda_1)$$

$$\sqrt{k_1'} = \frac{1 - 2\lambda_1}{1 + 2\lambda_1}$$

$$k_1' = \left(\frac{1 - 2\lambda_1}{1 + 2\lambda_1} \right)^2$$

になります。最後に k_1' から k_1 を求めますと、

$$k_1 = \sqrt{1 - k_1'^2}$$

になります。この k_1 が m^2 となります。

次に H を求めます。ユーザーの要求仕様、「通過域での許容最大減衰値」（通過域うねりの許容値）を負の数 $-A_p$ [dB] としますと、うねり最大部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_p = 20 \log_{10} \frac{OUT}{IN} \text{ [dB]}$$

$$\log_{10} \frac{OUT}{IN} = \frac{-A_p}{20}$$

$$\frac{OUT}{IN} = 10^{\frac{-A_p}{20}}$$

$$\frac{IN}{OUT} = \frac{1}{10^{\frac{-A_P}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_P}{20}}\right)^{-1} = 10^{\frac{A_P}{20}}$$

でした。フィルターの周波数伝達関数の絶対値は、 $\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}}$ ですので、両者を等しいと

置き、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{OUT}{IN}$$

$$\frac{1}{1+H^2f(\omega)^2} = \frac{OUT^2}{IN^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(\frac{IN}{OUT}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_P}{20}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1$$

となります。通過域内での元関数 $f(\omega)$ のうねりの最大値の 2 乗は、 $f^2(\omega_1) = m^2$ ですので、

$$H^2m^2 = 10^{\frac{A_P}{10}} - 1$$

$$H^2 = \frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{m^2}$$

となります。H はユーザー仕様側の通過域うねりの最大値を、元関数側の通過域うねりの最大値で割ったものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの阻止域における最小減衰量 $-A_S[\text{dB}]$ は次のようになります。

その場所の元関数 $f(\omega)$ における値が、 $f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right) = \frac{1}{m^2}$ ですので、

$$\begin{aligned} -A_S &= 20\text{Log}_{10} \frac{OUT}{IN} = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right)}} = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+H^2 \cdot \frac{1}{m^2}}} \\ &= 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^2} \cdot \frac{1}{m^2}}} = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_P}{10}}-1}{m^4}}} \end{aligned}$$

となり、これでユーザーに提示する、阻止域最小減衰量が求まりました。

②、 $-A_P$ と $-A_S$ が指定された場合、整数の n での Ω_S を求める方法。

$-A_P$ および $-A_S$ を、ユーザー要求仕様の $-A_P$ および $-A_S$ と同じにしたい場合、先程求めた仮の $m^2=k_1$ 、

$$m^2 = \sqrt{\frac{10^{\frac{A_P}{10}} - 1}{10^{\frac{A_S}{10}} - 1}}$$

と仮の H 、

$$H^2 = \sqrt{\left(10^{\frac{A_P}{10}} - 1\right) \left(10^{\frac{A_S}{10}} - 1\right)}$$

を、そのまま使います。したがって、 q_1 は仮の q_1 の値で正式決定します。次に、 $q^n = q_1$ の両辺を $\frac{1}{n}$ 乗し、

$$q^{\frac{n}{n}} = q_1^{\frac{1}{n}} \quad q = q_1^{\frac{1}{n}}$$

で正しい q を求めます。この q から k を求めます。 q から k の求め方は、 k から q を求めた時と反対の計算を行います。まず λ を q から求めます。「楕円関数の数値計算」の章、3 で書きました通り、

$$\lambda = q - 2q^5 + 5q^9 - 10q^{13} + 18q^{17} - 32q^{21} + 55q^{25} - \dots$$

です。次に、 λ から k' を求めます。 λ の式を変形しますと、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}} = \lambda$$

$$1 - \sqrt{k'} = 2\lambda + 2\lambda\sqrt{k'}$$

$$1 - 2\lambda = \sqrt{k'}(1 + 2\lambda)$$

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - 2\lambda}{1 + 2\lambda}$$

$$k' = \left(\frac{1 - 2\lambda}{1 + 2\lambda} \right)^2$$

になります。最後に k' から k を求めますと、

$$k = \sqrt{1 - k'^2}$$

になります。この正しい k が過渡域の幅を決定します。この k から Ω_s を計算します。 k から Ω_s への変換は次の通りです。

阻止域先端周波数 f_s [Hz] を通過域端周波数 f_p [Hz] で割ったもの、 $\frac{\text{阻止域先端周波数 } f_s [\text{Hz}]}{\text{通過域端周波数 } f_p [\text{Hz}]}$

が Ω_s (ラジオメガエス) です。

今回は、 \sqrt{k} が通過域端周波数、 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ が阻止域先端周波数になりますから、

$$\Omega_s = \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{k}$$

となります。角周波数で表されていても分子分母の 2π が約分されるので同じです。 Ω_s は新しい k の逆数となりました。これでユーザーに提示する Ω_s が求まりました。

③、 $-A_s$ と Ω_s が指定された場合、整数の n での $-A_p$ を求める方法。

$-A_s$ と k を、ユーザー要求仕様の $-A_s$ および k と同じにしたい場合、ユーザー要求仕様の k から q を計算します。

3 次および 4 次連立チェビシェフフィルターの章で説明しましたが、連立チェビシェフフィルターでは、通過域の最大許容減衰値を離れる場所を、正規化角周波数で b と指定しました。 b とは本章の始めに出てきました ω_p と同じです。 b^2 は k でした。したがって、 ω_p^2 が k となります。

$$\omega_p = 2\pi f_p \cdot \frac{1}{2\pi \sqrt{f_p \cdot f_s}} = \frac{\sqrt{f_p} \cdot \sqrt{f_p}}{\sqrt{f_p} \cdot \sqrt{f_s}} = \sqrt{\frac{f_p}{f_s}}$$

でしたので、

$$\omega_p^2 = \frac{f_p}{f_s} = k$$

となります。したがって k は、ユーザーに提示した Ω_s (ラジオメガエス) の逆数になります。 k から q を計算します。 q の計算方法は、

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + 20910\lambda^{21} + 268616\lambda^{25}$$

です。 $q^n = q_1$ ですから、 q^n の n に整数の次数を代入すれば、整数の次数に対する q_1 が求まります。

この q_1 から $k_1=m^2$ を求めます。 q_1 から $k_1=m^2$ の求め方は、「楕円関数の数値計算」の章、3 で書きました通り、

$$\lambda_1 = q_1 - 2q_1^5 + 5q_1^9 - 10q_1^{13} + 18q_1^{17} - 32q_1^{21} + 55q_1^{25} - \dots$$

です。次に、 λ_1 から k_1' を求めます。 λ_1 の式を変形しますと、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{k_1'}}{1 + \sqrt{k_1'}} = \lambda_1$$

$$1 - \sqrt{k_1'} = 2\lambda_1 + 2\lambda_1\sqrt{k_1'}$$

$$1 - 2\lambda_1 = \sqrt{k_1'}(1 + 2\lambda_1)$$

$$\sqrt{k_1'} = \frac{1 - 2\lambda_1}{1 + 2\lambda_1}$$

$$k_1' = \left(\frac{1 - 2\lambda_1}{1 + 2\lambda_1} \right)^2$$

になります。最後に k_1' から k_1 を求めますと、

$$k_1 = \sqrt{1 - k_1'^2}$$

になります。この k_1 が m^2 となります。

次に H を求めます。フィルターの要求仕様で決まる「阻止域許容最小減衰値」を負の数 $-A_S[\text{dB}]$ としますと、阻止域減衰最小部分での、対数表示ではない生（なま）の入出力関係は、

$$-A_S = 20 \log_{10} \frac{\text{OUT}}{\text{IN}} [\text{dB}]$$

$$\log_{10} \frac{\text{OUT}}{\text{IN}} = \frac{-A_S}{20}$$

$$\frac{\text{OUT}}{\text{IN}} = 10^{\frac{-A_S}{20}}$$

$$\frac{\text{IN}}{\text{OUT}} = \frac{1}{10^{\frac{-A_S}{20}}} = \left(10^{\frac{-A_S}{20}} \right)^{-1} = 10^{\frac{A_S}{20}}$$

となります。一方フィルターの周波数伝達関数の絶対値は、 $\frac{1}{\sqrt{1 + H^2 f^2(\omega)}}$ ですので、

$$\frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega)}} = \frac{\text{OUT}}{\text{IN}}$$

$$\frac{1}{1+H^2f^2(\omega)} = \frac{\text{OUT}^2}{\text{IN}^2}$$

$$1+H^2f^2(\omega) = \left(\frac{\text{IN}}{\text{OUT}}\right)^2$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(\frac{\text{IN}}{\text{OUT}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = \left(10^{\frac{A_s}{20}}\right)^2 - 1$$

$$H^2f^2(\omega) = 10^{\frac{A_s}{10}} - 1$$

となります。阻止域内での元関数 $f(\omega)$ の減衰の極小値の 2 乗は、 $f^2\left(\frac{1}{\omega_1}\right) = \frac{1}{m^2}$ ですので、

$$H^2 \frac{1}{m^2} = 10^{\frac{A_s}{10}} - 1$$

$$H^2 = \frac{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}{\frac{1}{m^2}} = \left(10^{\frac{A_s}{10}} - 1\right) m^2$$

となります。H は仕様側の阻止域うねりの最小値を、元関数側の阻止域うねりの最小値で割ったもの、あるいは仕様側の阻止域うねりの最小値に、元関数側の通過域うねりの最大値をかけたものになります。

この係数 H がつくことによって、フィルターの通過域における最大減衰量 $-A_p[\text{dB}]$ は次のように計算されます。

その場所の元関数 $f(\omega)$ における値が $f^2(\omega_1) = m^2$ ですので、

$$\begin{aligned} -A_p &= 20\text{Log}_{10} \frac{\text{OUT}}{\text{IN}} = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+H^2f^2(\omega_1)}} = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+H^2m^2}} \\ &= 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{10^{\frac{A_s}{10}}-1}{\frac{1}{m^2}} \bullet m^2}} = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{1+\left(10^{\frac{A_s}{10}}-1\right)m^4}} \end{aligned}$$

となります。これでユーザーに提示する、通過域最大減衰値が求まりました。

全てが気に入らない場合、最初の入力値をもう少し厳しい値にして、次数を増やすという方法があります。

[目次へ戻る](#)