相反（そうはん）の定理について　　２０２１年１２月２４日　　目次へ戻る

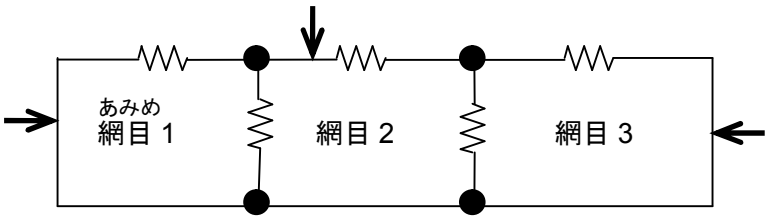
2022.6.20　2022.11.24　訂正

相反の定理とは「無電源回路網中の枝路 a に電源 V を挿入した時、同じ回路網中の他の任意の枝路 b に流れる電流は、枝路 a から外した電源を枝路 b に挿入した時、枝路 a に流れる電流に等しい。」と言うものです。枝路（しろ）とは分岐合流の無い区間のことです。

網目電流の決め方については、「必要な網目電流の数」の章をご覧下さい。

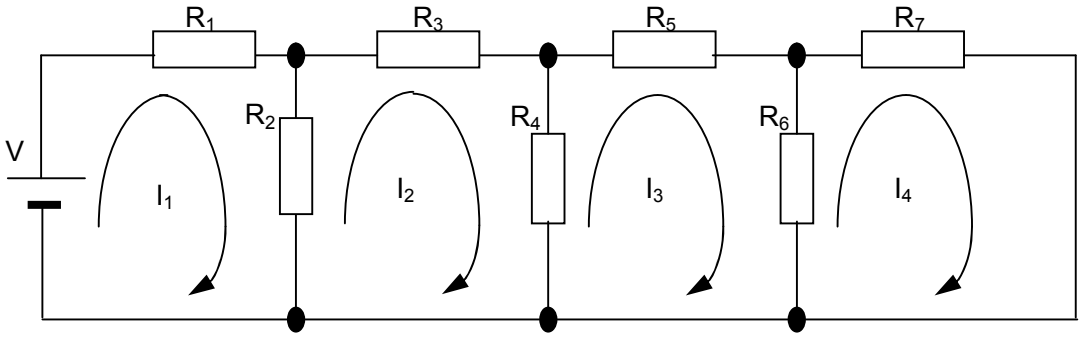
1、　一方の枝路は単独枝路もう一方の枝路も単独枝路の場合

最初に、下図の矢印の所の様に隣の網目と共通にならない枝路に限定して考えます。



(1)電源が I_1 の網目にあるとき網目電流 I_4 を求める

電源の位置を左側にして、回路の網目（あみめ）電流を下図の様に決めます。



キルヒホッフの第 2 法則により、網目電流の向きを正の向きとし、網目内の全ての電源電圧と全ての電圧降下を加えると零になります。I_1 の網目において、R_1 には I_1 による電圧降下が I_1 の向きとは反対に生じます。R_2 には I_1 による電圧降下が I_1 の向きとは反対に生じます。同じく R_2 には I_2 による電圧降下が I_1 と同じ向きに生じます。電源 V が I_1 と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$V - R_1 I_1 - R_2 I_1 + R_2 I_2 = 0$$

$$V = R_1 I_1 + R_2 I_1 - R_2 I_2$$

$$(R_1 + R_2) I_1 - R_2 I_2 = V$$

最後の式に注目し、左辺に電圧降下、右辺に電源電圧を書き、初めから釣り合いの式にする方法もあります。既に移項されているので、自分の網目電流および同一方向の電流による電圧降下は＋、自分の網目電流とは反対方向の電流による電圧降下は－になります。右辺の電圧も同様に網目電流と同じ向きの電源は＋、反対向きの電源は－になります。次の網目からはこの方法で式を立てます。

I_2 の網目において R_2、R_3、R_4 には I_2 による＋の電圧降下、R_2 には I_1 による－の電圧降下、R_4 には I_3 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_2I_1+(R_2+R_3+R_4)I_2-R_4I_3=0$$

I_3 の網目において R_4、R_5、R_6 には I_3 による＋の電圧降下、R_4 には I_2 による－の電圧降下、R_6 には I_4 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_2+(R_4+R_5+R_6)I_3-R_6I_4=0$$

I_4 の網目において R_6、R_7 には I_4 による＋の電圧降下、R_6 には I_3 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_6I_3+(R_6+R_7)I_4=0$$

行列に書き直す為、各式に足りない電流を書き加えますと、

$$(R_1+R_2)I_1-R_2I_2+0\cdot I_3+0\cdot I_4=V$$

$$-R_2I_1+(R_2+R_3+R_4)I_2-R_4I_3+0\cdot I_4=0$$

$$0\cdot I_1-R_4I_2+(R_4+R_5+R_6)I_3-R_6I_4=0$$

$$0\cdot I_1+0\cdot I_2-R_6I_3+(R_6+R_7)I_4=0$$

になります。行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-①$$

になります。1－①式の行列を網目行列と呼ぶことにします。

電源から最も遠い網目電流 I_4 を求めます。1－①式からクラーメル（クラメルやクラメールとも呼びます）の解法により、

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & V \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & 0 \\ 0 & 0 & -R_6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{14}}{\Delta}$$

になります。1－①式右辺の電圧の列が、行列式の分子 4 列目に入ります。求めたい I_4 の列に電圧の列を入れます。電圧の列では 1 行目に V があり、2 行目 3 行目 4 行目が 0 ですから、分子を 4 列目で展開し、$V \cdot \Delta_{14}$ （Δ_{14} は 1 行目 4 列目の余因子。余因子については 8 ページをご覧下さい。）にしますと、

$$V \cdot \Delta_{14} = V \cdot - \begin{vmatrix} -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-②$$

になります。1 行目 4 列目の余因子は頭に－が付きます。更に 1 列目で展開をしますと、

$$= -V(-R_2)\begin{vmatrix} -R_4 & R_4+R_5+R_6 \\ 0 & -R_6 \end{vmatrix}$$

$$= VR_2(-R_4)(-R_6)$$

$$= VR_2R_4R_6$$

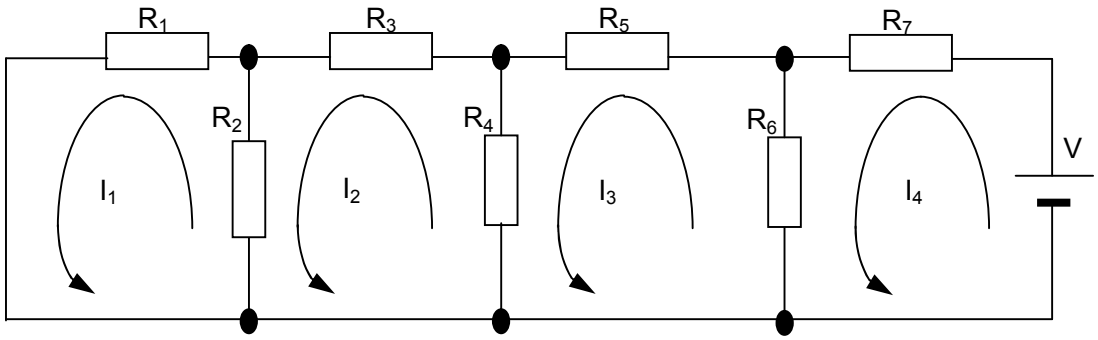
になります。したがって、

$$I_4 = \frac{VR_2R_4R_6}{\Delta}$$

となります。

(2) 電源が I_4 の網目のとき網目電流 I_1 を求める

電源の位置を右側にして、回路の網目（あみめ）電流を下図の様に決めます。キルヒホッフの第 2 法則により式を立てます。



(1)の時と同じく、最初から釣り合いの式として書きます。I_1 の網目において、R_2、R_1 には I_1 による＋の電圧降下、R_2 には I_2 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 = 0$$

I_2 の網目において R_4、R_3、R_2 には I_2 による＋の電圧降下、R_2 には I_1 による－の電圧降下、R_4 には I_3 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 = 0$$

I_3 の網目において R_6、R_5、R_4 には I_3 による＋の電圧降下、R_4 には I_2 による－の電圧降下、R_6 には I_4 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 - R_6 I_4 = 0$$

I_4 の網目において R_7、R_6 には I_4 による＋の電圧降下、R_6 には I_3 による－の電圧降下があります。電源 V が I_4 と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$-R_6 I_3 + (R_6 + R_7)I_4 = V$$

行列に書き直す為、各式に足りない電流を書き加えますと、

$$(R_1 + R_2)I_1 - R_2 I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 = 0$$

$$-R_2 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 + 0 \cdot I_4 = 0$$

$$0 \cdot I_1 - R_4 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 - R_6 I_4 = 0$$

$$0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - R_6 I_3 + (R_6 + R_7)I_4 = V$$

になります。行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-③$$

になります。1－③式の網目行列を 1－①式と比較しますと、網目電流の向きを逆にしたので、V の場所が違うだけです。

電源が右側の時の網目電流 I_1 を求めます。1－③式からクラーメルの解法により、

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ V & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ 0 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{41}}{\Delta}$$

です。1－③式右辺の電圧の列が、行列式の分子 1 列目に入ります。求めたい I_1 の列に V の列を入れます。V の列では 1 行目 2 行目 3 行目が 0 で、4 行目に V がありますから、分子を 1 列目で展開し、$V \cdot \Delta_{41}$（Δ_{41} は 4 行目 1 列目の余因子。余因子については 8 ページをご覧下さい。）にしますと、

$$V \cdot \Delta_{41} = V \cdot - \begin{vmatrix} -R_2 & 0 & 0 \\ R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 1-④$$

です。4 行目 1 列目の余因子は頭に－が付きます。さらに 3 列目で展開をしますと、

$$\begin{aligned} &= -V(-R_6)\begin{vmatrix} -R_2 & 0 \\ R_2+R_3+R_4 & -R_4 \end{vmatrix} \\ &= VR_6(-R_2)(-R_4) \\ &= VR_2R_4R_6 \end{aligned}$$

になります。したがって、

$$I_1 = \frac{VR_2R_4R_6}{\Delta}$$

です。

電源が左側の時の網目電流 I_4 と、電源が右側の時の網目電流 I_1 は同じになりました。その訳は、

I_1 の網目に電源があり電流 I_4 を求める時、

電圧の列の 1 行目だけが V になり、電圧の列が行列式分子の 4 列目に入る。

I_4 の網目に電源があり電流 I_1 を求める時、

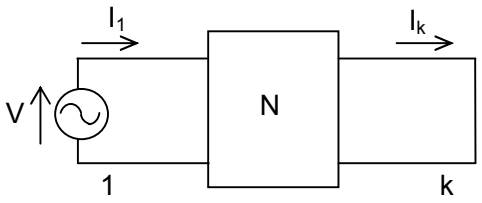
電圧の列の 4 行目だけが V になり、電圧の列が行列式分子の 1 列目に入る。

からです。分子の行列式を電圧の列で展開する際、網目行列 1－①式および 1－③式が対称行列であり、1－②式の 1 行目 4 列目の余因子（＝余因数）と 1－④式の 4 行目 1 列目の余因子（＝余因数）が同じ値になるからです。詳しくは以下をご覧下さい。

(3)一般論

電源を持たない回路網 N から、網目 1 内の枝路および網目 k 内の枝路を引き出し、網目 1 内の枝路に電源 V を挿入します。1 で述べました通り、引き出す枝路は隣の網目と共通にならない枝路に限定します。

各網目に I_1、I_2・・・・I_k、・・・・I_n の電流が流れた時、



$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1k} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2k} & \cdots & Z_{2n} \\ \bullet & & & \bullet & & \\ Z_{k1} & Z_{k2} & \cdots & Z_{kk} & \cdots & Z_{kn} \\ \bullet & & & \bullet & & \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nk} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \bullet \\ I_k \\ \bullet \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots 1-⑤$$

と言う網目行列が出来ます。網目番号と電流番号は同一とします。

1 行目の Z_{11} から Z_{1n} までは、網目 1 の様子を表してます。

1 行目 1 列目の Z_{11} は、網目 1 内で電流 I_1 による電圧降下を生じるインピーダンスです。

1 行目 2 列目の Z_{12} は、網目 1 内で電流 I_2 による電圧降下を生じるインピーダンスです。

1 行目 k 列目の Z_{1k} は、網目 1 内で電流 I_k による電圧降下を生じるインピーダンスです。

・・・・・

2 行目の Z_{21} から Z_{2n} までは、網目 2 の様子を表しています。

2 行目 1 列目の Z_{21} は、網目 2 内で電流 I_1 による電圧降下を生じるインピーダンスです。

2 行目 2 列目の Z_{22} は、網目 2 内で電流 I_2 による電圧降下を生じるインピーダンスです。

2 行目 k 列目の Z_{2k} は、網目 2 内で電流 I_k による電圧降下を生じるインピーダンスです。

・・・・・

つまり添え字がゾロ目の Z_{11}、Z_{22}・・・Z_{kk}・・・・Z_{nn} は、網目内にある全てのインピーダンスを表し、自己インピーダンスと呼ばれます。1－①式をご参照下さい。

一方添え字の食い違っている Z_{ij} は、網目 i と網目 j との間にある共通のインピーダンスで、共通（または相互）インピーダンスと呼ばれます。

例えば Z_{12} は、網目 1 と網目 2 との間にある共通インピーダンスです。また Z_{23} は、網目 2 と網目 3 との間にある共通インピーダンスです。

網目 1 でキルヒホッフの式を作る時の網目 2 との共通インピーダンス Z_{12} は、網目 2 でキルヒホッフの式を作る時の網目 1 との共通インピーダンス Z_{21} と同じになります。

つまり網目 i での網目 j との共通インピーダンス Z_{ij} は、網目 j での網目 i との共通インピーダンス Z_{ji} と同じもの（同じでなければ共通インピーダンスと呼ばない）ですので、$Z_{ij}=Z_{ji}$ になります。1－①式の例で言えば $Z_{12}=Z_{21}$、$Z_{13}=Z_{31}$、$Z_{23}=Z_{32}$ などです。このように $Z_{ij}=Z_{ji}$ になっている行列を対称行列と呼びます。

$$\text{対称行列}=\begin{bmatrix} 7 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 6 \\ -5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

上の行列を行列式と考えた場合、i 行目 j 列目の余因子（＝余因数）と、j 行目 i 列目の余因子（＝余因数）は同じ値になります。1 行目 3 列目の余因子 Δ_{13} は、

$$\Delta_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}=24-(-10)=34$$

3 行目 1 列目の余因子 Δ_{31} は、

$$\Delta_{31}=\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=24-(-10)=34$$

となり、同じ値になりました。余因子については次ページをご覧下さい。

網目 1 内の隣の網目と共通にならない枝路に電源 V を挿入しましたので、電圧の列は 1 行目だけ V で他の行は全て 0 です。

全ての網目電流を時計回り、または反時計回りに決めます。

網目の数は最後の n に現れます。

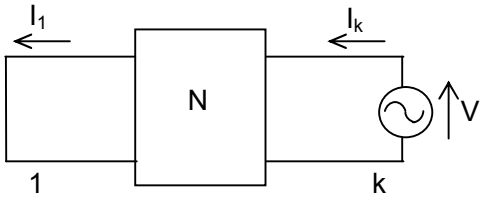
1－⑤式から網目 k に流れる電流 I_k を求めます。クラーメルの解法により、

$$I_k = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \bullet\bullet\bullet V \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \bullet\bullet\bullet 0 \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet 0 \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet 0 \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \bullet\bullet\bullet Z_{1k} \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \bullet\bullet\bullet Z_{2k} \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet Z_{kk} \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet Z_{nk} \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{1k}}{\Delta}$$

になります。網目行列右辺の電圧の列は 1 行目だけ V で他の行は全て 0 です。その電圧の列が行列式分子の k 列目に挿入されます。

分子の行列式を k 列目で展開しましたので、$V \cdot \Delta_{1k}$ になりました。Δ_{1k} は分子の行列式の 1 行目 k 列目の余因子です。1 行目 k 列目の余因子とは、行列式から 1 行目と k 列目の数字や文字を除去し、頭に＋または－を付けた行列式です。例えば i 行目 j 列目の余因子の場合、i+j が偶数の場合は＋、i+j が奇数の場合は－を付けます。

次に、電源を持たない回路網 N から、網目 1 内の枝路および網目 k 内の枝路を引き出し、k の枝路に電源 V を挿入します。1 で述べました通り、今回引き出す枝路は隣の網目と共通にならない枝路に限定します。各網目に I_1、I_2・・・・I_k、・・・・I_n の電流が流れた時、



$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \bullet\bullet\bullet Z_{1k} \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \bullet\bullet\bullet Z_{2k} \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet Z_{kk} \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet Z_{nk} \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \bullet \\ I_k \\ \bullet \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bullet \\ V \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots 1-⑥$$

と言う網目行列が出来ます。1－⑥式から網目 1 に流れる電流 I_k を求めます。クラーメルの解法により、

$$I_k = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Z_{12} \bullet\bullet\bullet Z_{1k} \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ 0 & Z_{22} \bullet\bullet\bullet Z_{2k} \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ V & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet Z_{kk} \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ 0 & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet Z_{nk} \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \bullet\bullet\bullet Z_{1k} \bullet\bullet\bullet Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} \bullet\bullet\bullet Z_{2k} \bullet\bullet\bullet Z_{2n} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{k1} & Z_{k2} \bullet\bullet\bullet Z_{kk} \bullet\bullet\bullet Z_{kn} \\ \bullet & \bullet \\ Z_{n1} & Z_{n2} \bullet\bullet\bullet Z_{nk} \bullet\bullet\bullet Z_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{k1}}{\Delta}$$

になります。網目行列右辺の電圧の列は k 行目だけ V で他の行は全て 0 です。その電圧の列が行列式分子の 1 列目に挿入されます。

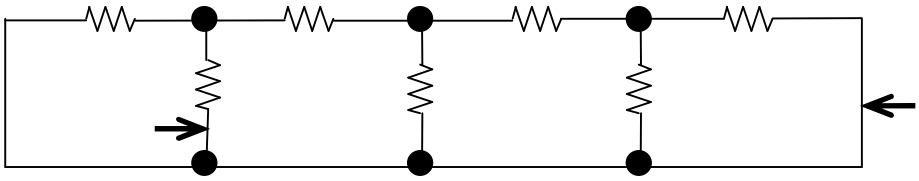
分子の行列式を 1 列目で展開しましたので、$V \cdot \Delta_{k1}$ になりました。Δ_{k1} は分子の行列式の k 行目 1 列目の余因子です。k 行目 1 列目の余因子とは、行列式から k 行目と 1 列目の数字や文字を除去し、頭に＋または－を付けた行列式です。例えば i 行目 j 列目の余因子の場合、i+j が偶数の場合は＋、i+j が奇数の場合は－を付けます。

対称行列式の、i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。1 行目 k 列目の余因子 Δ_{1k} と、k 行目 1 列目の余因子 Δ_{k1} は等しくなります。網目 1 内の枝路に電源 V を挿入した時、網目 k に流れる電流と、網目 k 内の枝路に電源 V を挿入した時、網目 1 に流れる電流は等しくなります。ただし今回の枝路は隣の網目と共通にならない枝路に限定します。回路から引き出す右側の枝路は網目 1 にこだわらず、隣の網目と共通にならない枝路であれば自由です。

2、一方の枝路は隣の網目と共通する枝路もう一方の枝路は単独枝路の場合

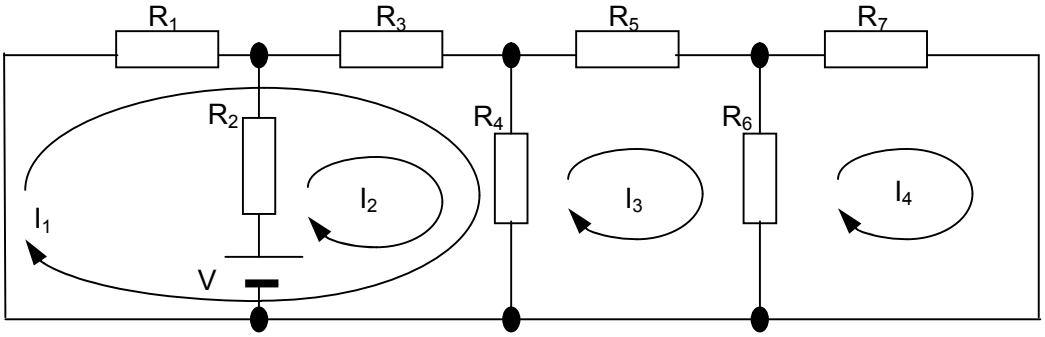
片側だけ隣の網目と共通する枝路に電源がある場合です。

下図の矢印の様な所に電源があり、もう一方の枝路は 1 と同じ場合です。



(1) R_2 の枝路に電源がある時 R_7 の枝路電流 I_4 を求める

R_2 の枝路が単独枝路になる様に、回路の網目（あみめ）電流を工夫します。 I_1 の流れを変更し、網目電流を下図の様に決めました。R_2 の枝路には I_2 だけ流れると仮定します。



１の時と同じく、最初から釣り合いの式として書きます。

I_1 の網目において、R_1、R_3、R_4 には I_1 による＋の電圧降下、R_3、R_4 には I_2 による＋の電圧降下、R_4 には I_3 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_1 + (R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 + 0 \cdot I_4 = 0$$

I_2 の網目において、R_2、R_3、R_4 には I_2 による＋の電圧降下、R_3、R_4 には I_1 による＋の電圧降下、R_4 には I_3 による－の電圧降下があります。電源 V が I_2 と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$(R_3 + R_4)I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 + 0 \cdot I_4 = V$$

I_3 の網目において、R_4、R_5、R_6 には I_3 による＋の電圧降下、R_4 には I_1 と I_2 による－の電圧降下、R_6 には I_4 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4 I_1 - R_4 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 - R_6 I_4 = 0$$

I_4 の網目において R_6 と R_7 には I_4 による＋の電圧降下、R_6 には I_3 による－の電圧降下があります。内部に電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - R_6 I_3 + (R_6 + R_7) I_4 = 0$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 2-①$$

になります。網目電流 I_4 を求めます。2－①式からクラーメルの解法により、

$$I_4 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & V \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & 0 \\ 0 & 0 & -R_6 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{24}}{\Delta}$$

です。網目行列右辺の電圧の列が、行列式の分子 4 列目に入ります。つまり、求めたい I_4 の列に V の列を入れます。V の列では 2 行目に V があり、1 行目 3 行目 4 行目が 0 ですから、分子を 4 列目で展開しますと、$V \cdot \Delta_{24}$ （Δ_{24} は 2 行目 4 列目の余因子）になります。

$$V \cdot \Delta_{24} = V \begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 2-②$$

です。3 行目で展開しますと、

$$= V(-R_6) \begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 \\ -R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

になります。1 列目から 2 列目を引きますと、

$$= V(-R_6)\begin{vmatrix} R_1 & R_3+R_4 \\ 0 & -R_4 \end{vmatrix}$$

$$= V(-R_6)R_1(-R_4)$$

$$= VR_1R_4R_6$$

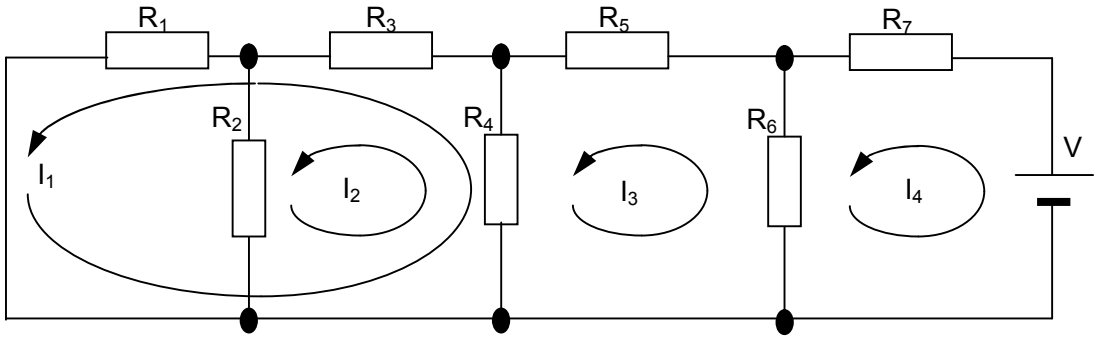
になります。したがって、

$$I_4 = \frac{VR_1R_4R_6}{\Delta}$$

となります。

(2) R_7 の枝路に電源がある時 R_2 の枝路電流 I_2 を求める

R_2 の枝路にあった電源を R_7 の枝路に移動します。(1)では網目電流を工夫し、R_2 の枝路が単独枝路になる様にしました。その電流の向きだけを逆にします。



釣り合いの式として書きます。

I_1 の網目において、R_4、R_3、R_1 には I_1 による＋の電圧降下、R_4 と R_3 には I_2 による＋の電圧降下、R_4 には I_3 によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1+R_3+R_4)I_1+(R_3+R_4)I_2-R_4I_3+0\cdot I_4=0$$

I_2 の網目において、R_4、R_3、R_2 には I_2 による＋の電圧降下、R_4 と R_3 には I_1 による＋の電圧降下、R_4 には I_3 によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_3+R_4)I_1+(R_2+R_3+R_4)I_2-R_4I_3+0\cdot I_4=0$$

I_3 の網目において、R_6、R_5、R_4 には I_3 による＋の電圧降下、R_4 には I_1 と I_2 によるーの電

圧降下、R_6 には I_4 によるーの電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_1 - R_4I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 - R_6I_4 = 0$$

I_4 の網目において、R_7 と R_6 には I_4 による＋の電圧降下、R_6 には I_3 によるーの電圧降下があります。電源 V が I_4 と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 - R_6I_3 + (R_6 + R_7)I_4 = V$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ V \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 2-③$$

になります。

網目電流 I_2 を求めます。2－③式からクラーメルの解法により、

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & 0 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & 0 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & 0 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & V & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \\ 0 & 0 & -R_6 & R_6+R_7 \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{42}}{\Delta}$$

です。網目行列右辺の電圧の列が、行列式の分子 2 列目に入ります。つまり、求めたい I_2 の列に V の列を入れます。V の列では 4 行目に V があり、1 行目 2 行目 3 行目が 0 ですから、分子を 2 列目で展開し、$V \cdot \Delta_{42}$ （Δ_{42} は 4 行目 2 列目の余因子）にしますと、

$$V \cdot \Delta_{42} = V \begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ R_3+R_4 & -R_4 & 0 \\ -R_4 & R_4+R_5+R_6 & -R_6 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 2-④$$

です。さらに 3 列目で展開をしますと、

$$= V(-R_6)\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

になります。1 行目から 2 行目を引きますと、

$$= V(-R_6)\begin{vmatrix} R_1 & 0 \\ R_3+R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

$$= V(-R_6)R_1(-R_4)$$
$$= VR_1R_4R_6$$

になります。したがって、

$$I_2 = \frac{VR_1R_4R_6}{\Delta}$$

となります。この結果は(1)で求めた、電源が R_2 の枝路にある時の R_7 の枝路電流＝網目電流 I_4 と一致します。

網目電流を工夫し、電源を挿入する枝路が単独枝路になる様にしました。また(2)で電流の向きを逆にして、(1)と(2)が同じ網目行列になる様にしました。

電源が R_2 の枝路にあり、R_7 の枝路電流を求める時、

電源の列の 2 行目が V です。それが行列式分子の 4 列目に入ります。この行列式分子を計算しますと、2－②式の「V×2 行目 4 列目の余因子」になります。

電源が R_7 の枝路にあり、R_2 の枝路電流を求める時、

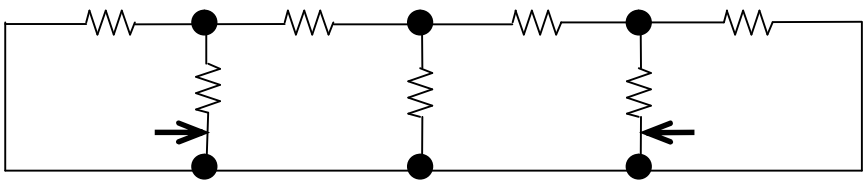
電源の列の 4 行目が V です。それが行列式分子の 2 列目に入ります。この行列式分子を計算しますと、2－④式の「V×4 行目 2 列目の余因子」になります。

網目電流の行列は対称行列です。対称行列で作った行列式は、i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。したがって電流も同じになります。

3、一方の枝路は隣の網目と共通する枝路もう一方の枝路も隣の網目と共通する枝路の場合

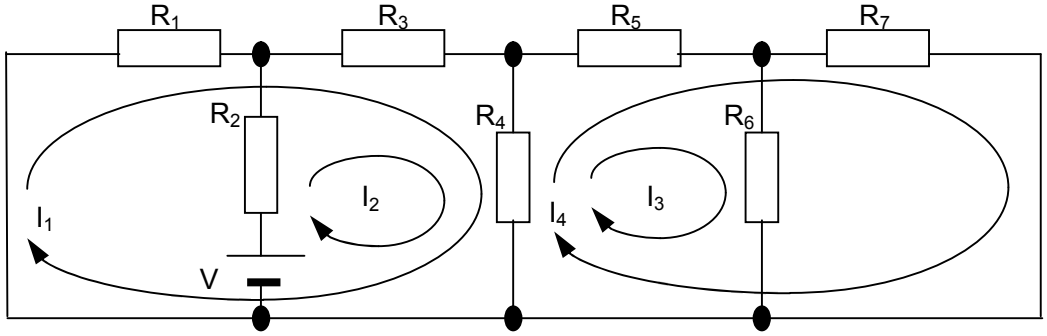
2 つの網目が共有する枝路に電源がある時、2 つの網目が共有する別枝路の電流です。

下図の矢印の様な所に電源があり、もう一方の枝路も下図の矢印の様な所にある場合です。



(1) R_2 の枝路に電源がある時 R_6 の枝路電流を求める

下図の R_2 の枝路及び R_6 の枝路が単独枝路になる様に、回路の網目（あみめ）電流を工夫します。網目電流を下図の様に決めました。R_2 の枝路には I_2 だけ、R_6 の枝路には I_3 だけが流れると仮定します。



1 の時と同じく、最初から釣り合いの式として書きます。

I_1 の網目において、R_1、R_3、R_4 には I_1 による＋の電圧降下、R_3、R_4 には I_2 による＋の電圧降下、R_4 には I_3 と I_4 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_1 + (R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 - R_4 I_4 = 0$$

I_2 の網目において、R_2、R_3、R_4 には I_2 による＋の電圧降下、R_3、R_4 には I_1 による＋の電圧降下、R_4 には I_3 と I_4 による－の電圧降下があります。電源 V が I_2 と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$(R_3 + R_4)I_1 + (R_2 + R_3 + R_4)I_2 - R_4 I_3 - R_4 I_4 = V$$

I_3 の網目において、R_4、R_5、R_6 には I_3 による＋の電圧降下、R_4、R_5 には I_4 による＋の電圧降下、R_4 には I_1、I_2 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4 I_1 - R_4 I_2 + (R_4 + R_5 + R_6)I_3 + (R_4 + R_5)I_4 = 0$$

I_4 の網目において、R_4、R_5、R_7 には I_4 による＋の電圧降下、R_4、R_5 には I_3 による＋の電圧降下、R_4 には I_1、I_2 による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4 I_1 - R_4 I_2 + (R_4 + R_5) I_3 + (R_4 + R_5 + R_7) I_4 = 0$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 3-①$$

になります。R_6の枝路電流＝網目電流 I_3 を求めます。3－①式からクラーメルの解法により、

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & 0 & -R_4 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & V & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & 0 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & 0 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}} = \frac{V \cdot \Delta_{23}}{\Delta}$$

です。網目行列右辺の電圧の列が、行列式の分子 3 列目に入ります。つまり、求めたい I_3 の列に V の列を入れます。V の列では 2 行目に V があり、1 行目 3 行目 4 行目が 0 ですから、分子を 3 列目で展開しますと、$V \cdot \Delta_{23}$ （Δ_{23} は 2 行目 3 列目の余因子）になります。余因子の正負に注意して、

$$V \cdot \Delta_{23} = V \cdot - \begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 3-②$$

です。3 行目から 2 行目を引きますと、

$$= V \cdot - \begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 \\ 0 & 0 & R_7 \end{vmatrix}$$

になります。3 行目で展開しますと

$$= -VR_7 \begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & R_3 + R_4 \\ -R_4 & -R_4 \end{vmatrix}$$

です。1 列目から 2 列目を引きますと、

$$= -VR_7 \begin{vmatrix} R_1 & R_3 + R_4 \\ 0 & -R_4 \end{vmatrix}$$

になります。

$$= -VR_7R_1(-R_4)$$
$$= VR_1R_4R_7$$

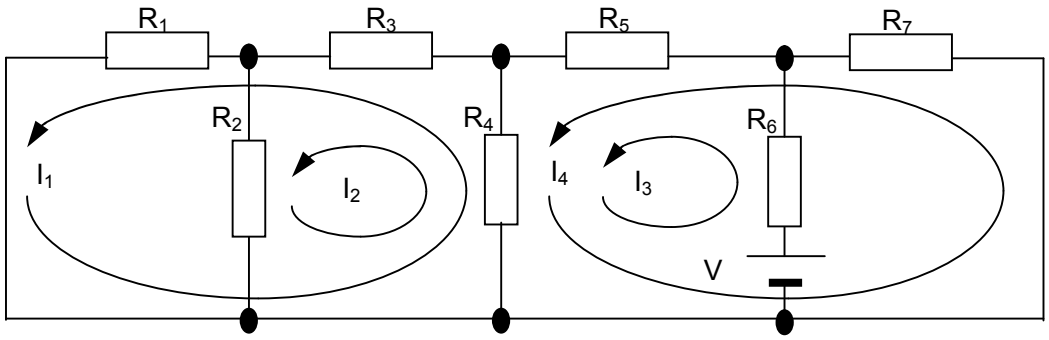
です。したがって、

$$I_3 = \frac{VR_1R_4R_7}{\Delta}$$

となります。

(2)R_6の枝路に電源がある時 R_2の枝路電流を求める

R_2の枝路にあった電源を R_6の枝路に移動します。(1)では R_2の枝路及び R_6の枝路が単独枝路になる様に、網目（あみめ）電流を工夫しました。その電流の向きだけを逆にしました。



最初から釣り合いの式として書きます。

I_1の網目において、R_4、R_3、R_1には I_1による＋の電圧降下、R_4、R_3には I_2による＋の電圧降下、R_4には I_3と I_4による－の電圧降下があります。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_1 + R_3 + R_4)I_1 + (R_3 + R_4)I_2 - R_4I_3 - R_4I_4 = 0$$

I_2の網目において、R_4、R_3、R_2にはI_2による＋の電圧降下、R_4、R_3にはI_1による＋の電圧降下、R_4にはI_3とI_4による－の電圧降下が生じます。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$(R_3+R_4)I_1+(R_2+R_3+R_4)I_2-R_4I_3-R_4I_4=0$$

I_3の網目において、R_6、R_5、R_4にはI_3による＋の電圧降下、R_5、R_4にはI_4による＋の電圧降下、R_4にはI_1とI_2による－の電圧降下が生じます。電源VがI_3と同じ向きにあります。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_1-R_4I_2+(R_4+R_5+R_6)I_3+(R_4+R_5)I_4=V$$

I_4の網目において、R_7、R_5、R_4にはI_4による＋の電圧降下、R_5、R_4にはI_3による＋の電圧降下、R_4にはI_1とI_2による－の電圧降下が生じます。電源はありません。次の式が成り立ちます。

$$-R_4I_1-R_4I_2+(R_4+R_5)I_3+(R_4+R_5+R_7)I_4=0$$

行列に書き直しますと、

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot 3-③$$

になります。R_2の枝路電流＝網目電流I_2を求めます。3－③式からクラーメルの解法により、

$$I_2=\frac{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & 0 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & 0 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & V & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & 0 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1+R_3+R_4 & R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3+R_4 & R_2+R_3+R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5+R_6 & R_4+R_5 \\ -R_4 & -R_4 & R_4+R_5 & R_4+R_5+R_7 \end{vmatrix}}=\frac{V\cdot\Delta_{32}}{\Delta}$$

です。網目行列右辺の電圧の列が、行列式の分子 2 列目に入ります。つまり、求めたい I_2 の列に V の列を入れます。V の列では 3 行目に V があり、1 行目 2 行目 4 行目が 0 ですから、分子を 2 列目で展開しますと、$V \cdot \Delta_{32}$（Δ_{32} は 3 行目 2 列目の余因子）になります。余因子の正負に注意して、

$$V \cdot \Delta_{32} = V \cdot - \begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 & -R_4 \\ R_3 + R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & R_4 + R_5 + R_7 \end{vmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot 3-④$$

です。1 行目から 2 行目を引きますと、

$$= V \cdot - \begin{vmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ R_3 + R_4 & -R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_4 + R_5 & R_4 + R_5 + R_7 \end{vmatrix}$$

になります。1 行目で展開しますと

$$= -VR_1 \begin{vmatrix} -R_4 & -R_4 \\ R_4 + R_5 & R_4 + R_5 + R_7 \end{vmatrix}$$

です。2 列目から 1 列目を引きますと、

$$= -VR_1 \begin{vmatrix} -R_4 & 0 \\ R_4 + R_5 & R_7 \end{vmatrix}$$

になります。

$$= -VR_1(-R_4)R_7$$
$$= VR_1R_4R_7$$

です。したがって、

$$I_2 = \frac{VR_1R_4R_7}{\Delta}$$

となります。この結果は(1)で求めた、電源が R_2 の枝路にある時の R_6 の枝路電流＝網目電流 I_3 と一致します。

網目電流を工夫し、電源を挿入する枝路と電流値を計算する枝路が共に単独枝路になる様にしました。また網目電流の向きを逆にして、(1)と(2)で同じ網目行列になる様にしました。

電源が R_2 の枝路にあり、R_6 の枝路電流を求める時、

電源の列の 2 行目が V です。それが行列式分子の 3 列目に入ります。この行列式分子を

計算しますと、3－②式の「V×2 行目 3 列目の余因子」になります。

電源が R_6 の枝路にあり、R_2 の枝路電流を求める時、

電源の列の 3 行目が V です。それが行列式分子の 2 列目に入ります。この行列式分子を計算しますと、3－④式の「V×3 行目 2 列目の余因子」になります。

網目電流の行列は対称行列です。対称行列で作った行列式は、i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。したがって電流も同じになります。

4、結論

以上 3 つの例から結論されることは以下のことです。

無電源回路網中の網目電流を工夫すれば、電源を挿入する枝路並びに枝路電流を計算する枝路を 1 つの網目電流だけが流れる単独枝路と仮定することが出来ます。一方、網目電流の行列は常に対称行列です。対称行列で作った行列式は、i 行目 j 列目の余因子と、j 行目 i 列目の余因子は同じ値になります。したがって電流も同じになり「相反の定理」となります。

目次へ戻る