連立チェビシェフフィルターの伝達関数　　2009 年 12 月 25 日　目次へ戻る

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗を展開通分した形で書いた式は、「3 次連立チェビシェフフィルター」の章 18 ページ、「4 次連立チェビシェフフィルター」の章 20 ページに載せました。例えば連立チェビシェフフィルター3 次では、

$$
\begin{aligned}
y^2(\omega) &= \frac{1}{1+H^2 f^2(\omega)} \\
&= \frac{1}{1+H^2\left(\omega\dfrac{\omega^2-\omega_2{}^2}{\omega_2{}^2\omega^2-1}\right)^2} \\
&= \frac{1}{1+H^2\dfrac{\omega^2\left\{\omega^2-\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\right\}^2}{\left\{\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2}} \\
&= \frac{1}{\dfrac{\left\{\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2+H^2\omega^2\left\{\omega^2-\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\right\}^2}{\left\{\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2}}
\end{aligned}
$$

になります。

展開通分した形で書いた周波数伝達関数の絶対値の 2 乗は、3 階建の繁分数式になります。「連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の 2 乗の因数分解」の章において、1 階 2 階の分数式を 0 にする根を見つける作業をしました。分数式を 0 にすることは、分子を 0 にすることと同じですから、2 階部分を 0 にする根を見つけたという事です。

作業が終了しましたので、ここで（3 階÷1 階 2 階）を行い、普通の分数式に直しますと、

$$
= \frac{\left\{\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2}{\left\{\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\omega^2-1\right\}^2+H^2\omega^2\left\{\omega^2-\mathrm{ksn}^2\left(\frac{2}{3}K,k\right)\right\}^2}
$$

になります。この式では、繁分数式の 1 階部分が分子になります。また、繁分数式の 2 階部分が分母になります。「連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の 2 乗の因数分解」の章において、繁分数式の 2 階部分を 0 にする根を見つけましたが、この式の分母を 0 にする根を見つけた事と同じです。分母を 0 にする根の式を復習します。下記の通りです。

次数 n が奇数の場合　$\omega = \sqrt{k}\,sn\left(\frac{2aK}{n} + j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$ ・・・①

a＝0,1,2,3･･･

次数 n が偶数の場合　$\omega = \sqrt{k}\,sn\left(\frac{2a-1}{n}K + j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$ ・・・②

a＝1,2,3,4･･･

この ω の根の式から、実際的な根の値を求めます。さらに伝達関数の s の根に直し、伝達関数を作ります。

1、次数 n が奇数の場合の伝達関数

(1)分母の伝達関数

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗は偶関数です。偶関数の場合、一部の根さえ発見出来れば、他の根は計算によって芋づる式に出て来ます。「周波数伝達関数から伝達関数へ」の章をご覧下さい。見いだすべき根の数について、以下の表にまとめました。

根の数と見いだすべき根の数

n	周波数伝達関数の次数	周波数伝達関数の 2 乗の次数	純虚数根数	複素数根数	見いだすべき純虚数根数	見いだすべき複素数根数
3	3	6	2	4	1	1
5	5	10	2	8	1	2
7	7	14	2	12	1	3
9	9	18	2	16	1	4
11	11	22	2	20	1	5
13	13	26	2	24	1	6

ｉ、純虚数根

sn の変数が純虚数の場合、sn の値も純虚数になりますので、①式の a が 0 の時の ω を求め、1 つの純虚数根 ja_0 とします。$sn(jv,k) = j\frac{sn(v,k')}{cn(v,k')}$ を使用して、

$$ja_0 = \sqrt{k}\,sn\left(j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right) = j\sqrt{k}\,\frac{sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

となります。ここで分母の cn の変数 $\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'$ は、$0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ です（この証拠は ii に有ります）ので、

$$cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \sqrt{1-sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

の変形が出来ます。したがって、

$$ja_0 = j\sqrt{k}\,\frac{sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{\sqrt{1-sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}}$$

となります。ja_0 に対応する s の根は j を掛け、90 度反時計式に回転させたものです。

$j\,ja_0 = -a_0$ です。$-a_0$ は複素平面左側になりますので、この根を採用します。周波数伝達関数の絶対値の 2 乗は偶関数ですので、当然 $-ja_0$ も根になります。$-ja_0$ は j を掛け s の根に直した時、$-j\,ja_0 = +a_0$ となり、複素平面右側根になるので採用しません。伝達関数分母の 1 次因数は、

$$s-(-a_0) = s+a_0$$

となります。

ii 、複素数根

次は分母の複素数の根です。複素平面左半面の s の根は、複素平面上半面の ω の根であり、複素平面上半面左右の ω の根が、複素平面左半面上下の s の共役根になります。

共役根は後で生成出来ますから、根としては複素平面上半面右側、つまり複素平面第 1 象限の ω 根を発見出来れば良いです。

その条件は、変数の実数部が 0～K、虚数部が 0～K' までの sn の値は、複素平面第 1 象限全体に写像される（「ヤコビの楕円関数」の章 46 ページを参照下さい）ことから、①式

の sn の変数実数部が、$0<\frac{2aK}{n}<K$、変数虚数部が、$0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ を満たせば良いです。この不等式に等号が入りますと、sn の値が実軸上または虚軸上の値になることがあります。その場合複素数根にならないので、全部不等号になります。

実数部の不等式 $0<\frac{2aK}{n}<K$ に正の数 n を掛けますと、$0<2aK<nK$ になります。正の数 $\frac{1}{2K}$ を掛けますと、$0<a<\frac{n}{2}$ になります。a は 1 から $\frac{n}{2}$ までの自然数を取れば、見いだすべき根の数と一致し、不等式も成立します。

一方、変数虚数部の不等式 $0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ が成り立つか分りません。①式、

$$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2aK}{n}+j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$$

で変数の虚数部 $j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'$ の、もともとの姿は $j\frac{K'}{K_1'}z_0K_1'$ でした。このとき分子分母にある K_1' の約分が問題になりました。このまま K_1' を約分しようとしますと、z_0K_1' から z_0 を取り出すため、完全楕円積分値 K_1' の値を求める必要がありました。

母数 k_1 は、0 に近い数です。それゆえ母数 k_1 の値を 0 で近似し、sn の代わりに sin を用いて z_0K_1' の値を計算したのです。

逆に k_1 の補母数 k_1' は、1 に近い数になります。母数 1 付近での完全楕円積分は、値が無限大に近づくので敏感になります。完全楕円積分値 K_1' を正確に求めるのは難しいのでした。そこで、今までに何度も出てきた式を使用することになりました。

$$\frac{K}{nK_1}=\frac{K'}{K_1'}$$

です。$\frac{K'}{K_1'}$ の代わりに $\frac{K}{nK_1}$ を使用するのです。変数虚数部は、$j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'$ になりました。以上のことは、「連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の 2 乗の因数分解」の章に詳しく書きました。

変数虚数部の不等式、$0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ の、もともとの姿は、$0<\frac{K'}{K_1'}z_0K_1'<K'$ です。

z_0K_1' の値を求める時、母数 k_1 の値を 0 で近似しましたが、k_1 は 0 ではなく少しの正の値を持っています。したがって k_1 の補母数 k_1' の値も 1 ではなく、1 より少し小さい値を持っています。完全楕円積分値 K_1' の値も無限大ではなく、正の有限の値になります。

もともとの不等式、$0<\frac{K'}{K_1'}z_0K_1'<K'$ の分子分母の K_1' は約分出来、不等式は

$0<z_0K'<K'$ となります。$\frac{K'}{K_1'}z_0K_1'$ の K_1' が z_0K_1' の値よりも大きい場合、z_0 は 1 以下の値となり、$0<z_0K'<K'$ の不等式も成り立ちます。

K_1' が z_0K_1' の値よりも大きいことが証明出来れば良いのですが、証明出来ないので実際値でお示しします。

z_0K_1' の値を各種 A_P で計算しますと、A_P＝1[dB]で約 1.427975、A_P＝0.1[dB]で約 2.57872、A_P＝0.01[dB]で約 3.73001 となります。

一方、As を少なめの 20[dB]とした場合、補母数 k_1' 値は、A_P＝1[dB]で約 0.99869、A_P＝0.1[dB]で約 0.99988、A_P＝0.01[dB]で約 0.999988 となります。

この補母数を用い、高精度の計算が出来る CASIO の keisan サイトで、第一種完全楕円積分値 K_1' を求めますと、A_P＝1[dB]で約 4.36111、A_P＝0.1[dB]で約 5.554033、A_P＝0.01[dB]で約 6.70506 となります。

K_1' は、z_0K_1' の値よりも常に大きいことになります。z_0 は 1 より小さくなり、不等式 $0<z_0K'<K'$ は成り立ちます。変数虚数部の不等式 $0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ も成り立ちます。

①式、

$$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2aK}{n}+j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$$

の、a が 1 から $\frac{n}{2}$ までの自然数の時の ω を求め、見い出すべき複素数根とします。

sn の変数が複素数の時、複素数変数の加法定理の式で sn の値を求めるのが常道です。複素数変数の加法定理の式を提示します。何故こうなるかは「ヤコビの楕円関数」の章 38 ページ以降をご覧下さい。

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(u+jv,k)&=\frac{\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(jv,k)\mathrm{dn}(jv,k)+\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(jv,k)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(jv,k)}\\&=\frac{\mathrm{sn}(u,k)\frac{1}{\mathrm{cn}(v,k')}\bullet\frac{\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}+j\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\frac{\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}}{1+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\frac{\mathrm{sn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}}\\&=\frac{\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{dn}(v,k')+j\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')\mathrm{cn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}\end{aligned}$$

加法定理の式を解くには、いろいろな sn、cn、dn の値を求める必要があります。最初に、sn(v,k')、cn(v,k')、dn(v,k')を求めます。$u=\frac{2aK}{n}$、$v=\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'$ です。

不等式、$0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ が成り立つ場合、$-K'<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ も成り立ちます。この不等式が成り立つ場合、$cn(v,k')=cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)$ と $dn(v,k')=dn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)$ を $sn(v,k')=sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)$ で表すことが出来ます。これにより次の計算が可能です。

この章の 3 ページで a_0 の式を、

$$a_0=\sqrt{k}\frac{sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}=\sqrt{k}\frac{sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{\sqrt{1-sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}}$$

と変形しました。左辺と右辺を 2 乗して、

$$a_0{}^2=k\frac{sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{1-sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

$$ksn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)=a_0{}^2-a_0{}^2sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)$$

$$a_0{}^2sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)+ksn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)=a_0{}^2$$

$$(a_0{}^2+k)sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)=a_0{}^2$$

$$sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)=\frac{a_0{}^2}{a_0{}^2+k}$$

$$sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)=\frac{a_0}{\sqrt{a_0{}^2+k}}$$

となります。次に a_0 の式を、

$$a_0=\sqrt{k}\frac{sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}=\sqrt{k}\frac{\sqrt{1-cn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}}{cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

と変形しますと、

$$a_0{}^2 = k\frac{1-cn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{cn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

$$k - kcn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = a_0{}^2cn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)$$

$$a_0{}^2cn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) + kcn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = k$$

$$(a_0{}^2 + k)cn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = k$$

$$cn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \frac{k}{a_0{}^2 + k}$$

$$cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \sqrt{\frac{k}{a_0{}^2 + k}}$$

になります。更に dn の式は、

$$dn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \sqrt{1-k'^2\,sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)} = \sqrt{1-k'^2\left(\frac{a_0{}^2}{a_0{}^2+k}\right)}$$

$$= \sqrt{1-(1-k^2)\left(\frac{a_0{}^2}{a_0{}^2+k}\right)} = \sqrt{1-\frac{a_0{}^2-k^2a_0{}^2}{a_0{}^2+k}} = \sqrt{\frac{a_0{}^2+k-a_0{}^2+k^2a_0{}^2}{a_0{}^2+k}} = \sqrt{\frac{k(1+ka_0{}^2)}{a_0{}^2+k}}$$

となります。

次は sn(u,k)、cn(u,k)、dn(u,k)を求めます。「連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の 2 乗の因数分解」の章の 1 ページに書きました様に、各零点 ω_{2a} は、

$$\omega_{2a} = \sqrt{k}\,sn\left(\frac{2aK}{n},k\right)$$

と表わされるのでした。したがって、

$$sn\left(\frac{2aK}{n},k\right) = \frac{\omega_{2a}}{\sqrt{k}}$$

となります。a が 0 の場合は純虚数根を探す場合です。現在は複素数の根を探しておりますので、a は 1 からスタートし「連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の 2 乗の因数分解」の章でも検討しました通り、$\frac{n}{2}$ までの自然数を採ります。

不等式、$0 < \frac{2K}{n\pi}z_0K_1' < K'$ が成り立つ場合、$-K' < \frac{2K}{n\pi}z_0K_1' < K'$ も成り立ちます。a は

$\frac{n}{2}$までの自然数ですから、$-K < \frac{2aK}{n} < K$ も成り立ちます。

この不等式が成り立つ場合、$cn(u,k) = cn\left(\frac{2aK}{n},k\right)$、$dn(u,k) = dn\left(\frac{2aK}{n},k\right)$ を、$sn(u,k) = sn\left(\frac{2aK}{n},k\right) = \frac{\omega_{2a}}{\sqrt{k}}$ を使って表すことが出来、

$$
\begin{aligned}
cn\left(\frac{2aK}{n},k\right) &= \sqrt{1 - sn^2\left(\frac{2aK}{n},k\right)} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{2a}}{\sqrt{k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{k - \omega_{2a}{}^2}{k}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dn\left(\frac{2aK}{n},k\right) &= \sqrt{1 - k^2 sn^2\left(\frac{2aK}{n},k\right)} \\
&= \sqrt{1 - k^2\left(\frac{\omega_{2a}}{\sqrt{k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - k\omega_{2a}{}^2}
\end{aligned}
$$

となります。以上の結果を、ω を求める①式に代入し、整理しますと、

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{k}\, sn\left(\frac{2aK}{n} + j\frac{2K}{n\pi} z_0 K_1',k\right) \\
&= \sqrt{k}\, \frac{sn\left(\frac{2aK}{n},k\right) dn\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right) + j\, cn\left(\frac{2aK}{n},k\right) dn\left(\frac{2aK}{n},k\right) sn\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right) cn\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right)}{cn^2\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right) + k^2 sn^2\left(\frac{2aK}{n},k\right) sn^2\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right)} \\
&= \sqrt{k}\, \frac{\frac{\omega_{2a}}{\sqrt{k}} \bullet \sqrt{\frac{k(1 + ka_0{}^2)}{a_0{}^2 + k}} + j\sqrt{\frac{k - \omega_{2a}{}^2}{k}} \bullet \sqrt{1 - k\omega_{2a}{}^2} \bullet \frac{a_0}{\sqrt{a_0{}^2 + k}} \bullet \sqrt{\frac{k}{a_0{}^2 + k}}}{\frac{k}{a_0{}^2 + k} + k^2 \bullet \frac{\omega_{2a}{}^2}{k} \bullet \frac{a_0{}^2}{a_0{}^2 + k}}
\end{aligned}
$$

$$= \sqrt{k}\,\frac{\dfrac{\omega_{2a}}{\sqrt{k}} \bullet \dfrac{\sqrt{k}\sqrt{1+ka_0^{\,2}}}{\sqrt{a_0^{\,2}+k}} + j\dfrac{\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\,2})(1-k\omega_{2a}^{\,2})}}{\sqrt{k}} \bullet \dfrac{a_0\sqrt{k}}{a_0^{\,2}+k}}{\dfrac{k+ka_0^{\,2}\omega_{2a}^{\,2}}{a_0^{\,2}+k}}$$

$$= \sqrt{k}\,\frac{\omega_{2a}\dfrac{\sqrt{1+ka_0^{\,2}}}{\sqrt{a_0^{\,2}+k}} + j\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\,2})(1-k\omega_{2a}^{\,2})} \bullet \dfrac{a_0}{a_0^{\,2}+k}}{\dfrac{k+ka_0^{\,2}\omega_{2a}^{\,2}}{a_0^{\,2}+k}}$$

$$= \sqrt{k}\,\frac{\omega_{2a}\sqrt{1+ka_0^{\,2}}\sqrt{a_0^{\,2}+k} + ja_0\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\,2})(1-k\omega_{2a}^{\,2})}}{k+ka_0^{\,2}\omega_{2a}^{\,2}}$$

$$= \frac{\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0^{\,2})(a_0^{\,2}+k)} + ja_0\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\,2})(1-k\omega_{2a}^{\,2})}}{\sqrt{k}(1+a_0^{\,2}\omega_{2a}^{\,2})}$$

になります。これが、n が奇数の場合の ω 複素数根 4 ペアの内、複素平面第 1 象限内にある根です。この根に対応する s の根は j を掛け 90 度反時計式に回転させたものです。これが複素平面第 2 象限にある s の根、A になります。

$$A = j \bullet \frac{\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0^{\,2})(a_0^{\,2}+k)} + ja_0\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\,2})(1-k\omega_{2a}^{\,2})}}{\sqrt{k}(1+a_0^{\,2}\omega_{2a}^{\,2})}$$

$$= \frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\,2})(1-k\omega_{2a}^{\,2})} + j\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0^{\,2})(a_0^{\,2}+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0^{\,2}\omega_{2a}^{\,2})}$$

A の共役 $\overline{A}$ は、第 3 象限にある次の根です。

$$\overline{A} = \frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}^{\,2})(1-k\omega_{2a}^{\,2})} - j\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0^{\,2})(a_0^{\,2}+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0^{\,2}\omega_{2a}^{\,2})}$$

この 2 つの根から出来る 2 次因数は、$(s-A)(s-\overline{A}) = s^2 - (A+\overline{A})s + A \bullet \overline{A}$ となりますので、$A+\overline{A}$ を計算しますと、

$$A+\overline{A}=\frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}+j\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}+$$

$$\frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}-j\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}$$

$$=\frac{-2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}$$

になります。さらに $A\bullet\overline{A}$ を計算しますと、

$$A\bullet\overline{A}=\frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}+j\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}\bullet$$

$$\frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}-j\omega_{2a}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}$$

$$=\frac{a_0{}^2(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)+\omega_{2a}{}^2(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}{k(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)^2}$$

$$=\frac{a_0{}^2k-k^2a_0{}^2\omega_{2a}{}^2-a_0{}^2\omega_{2a}{}^2+ka_0{}^2\omega_{2a}{}^4+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2+k\omega_{2a}{}^2+ka_0{}^4\omega_{2a}{}^2+k^2a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}{k(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)^2}$$

$$=\frac{a_0{}^2k+ka_0{}^2\omega_{2a}{}^4+k\omega_{2a}{}^2+ka_0{}^4\omega_{2a}{}^2}{k(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)^2}=\frac{a_0{}^2+a_0{}^2\omega_{2a}{}^4+\omega_{2a}{}^2+a_0{}^4\omega_{2a}{}^2}{(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)^2}$$

$$=\frac{(a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2)+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2(a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2)}{(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)^2}=\frac{(a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2)(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}{(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)^2}$$

$$=\frac{a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}$$

になります。求める伝達関数、分母の 2 次因数は、

$$s^2+\frac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}s+\frac{a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}$$

となります。これを a＝1 から $a<\frac{n}{2}$ の自然数で、繰り返せば良いです。

(2)分子の伝達関数

周波数伝達関数の絶対値の２乗の分子は、

$$(\omega_{2a}{}^2\omega^2-1)^2$$

です。ω_{2a}は、連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の２乗の因数分解の章１ページの表の各零点から決定されます。この式を次のように変形します。

$$\begin{aligned}
&(\omega_{2a}{}^2\omega^2-1)^2\\
&=(\omega_{2a}{}^2\omega^2-1)(\omega_{2a}{}^2\omega^2-1)\\
&=(\omega_{2a}\omega-1)(\omega_{2a}\omega+1)(\omega_{2a}\omega-1)(\omega_{2a}\omega+1)\\
&=(-1)(1-\omega_{2a}\omega)(1+\omega_{2a}\omega)(-1)(1-\omega_{2a}\omega)(1+\omega_{2a}\omega)\\
&=(1-\omega_{2a}{}^2\omega^2)(1-\omega_{2a}{}^2\omega^2)\\
&=(1-\omega_{2a}{}^2\omega^2)^2
\end{aligned}$$

伝達関数にさかのぼった式の s に jω と－jω を代入し、掛け合わせた時に、この最後の式が再現されなければなりません。

伝達関数にさかのぼるため、s＝jω ならば$\omega=\frac{s}{j}$ 、s＝－jω ならば$\omega=-\frac{s}{j}$ですから、

括弧内の式、$1-\omega_{2a}{}^2\omega^2$にこれらを代入して見ます。$\omega=\frac{s}{j}$の時は、

$$\begin{aligned}
&[1-\omega_{2a}{}^2\omega^2]_{\omega=\frac{s}{j}}\\
&=1-\omega_{2a}{}^2(\frac{s}{j})^2\\
&=1+\omega_{2a}{}^2s^2
\end{aligned}$$

となり、$\omega=-\frac{s}{j}$の時は、

$$\begin{aligned}
&[1-\omega_{2a}{}^2\omega^2]_{\omega=-\frac{s}{j}}\\
&=1-\omega_{2a}{}^2(-\frac{s}{j})^2\\
&=1+\omega_{2a}{}^2s^2
\end{aligned}$$

となります。どちらも同じです。伝達関数にさかのぼったであろう、$1+\omega_{2a}{}^2 s^2$ に、s＝jω および s＝－jω を代入して見ますと、

$$[1+\omega_{2a}{}^2 s^2]_{s=j\omega} = 1-\omega_{2a}{}^2\omega^2$$

$$[1+\omega_{2a}{}^2 s^2]_{s=-j\omega} = 1-\omega_{2a}{}^2\omega^2$$

になります。両者を掛け合わせますと、

$$(1-\omega_{2a}{}^2\omega^2)(1-\omega_{2a}{}^2\omega^2) = (1-\omega_{2a}{}^2\omega^2)^2$$

になり、s に jω と－jω を代入し、掛け合わせた時に周波数伝達関数の絶対値の 2 乗の分子、$(1-\omega_{2a}{}^2\omega^2)^2$ が再現されることが分ります。

したがって伝達関数の分子は、$1+\omega_{2a}{}^2 s^2$ か $\omega_{2a}{}^2 s^2+1$、または ω_{2a} をくくり出した形の、$\omega_{2a}{}^2(s^2+\frac{1}{\omega_{2a}{}^2})$ になります。これを a＝1 から a＜$\frac{n}{2}$ の自然数で繰り返せば良いです。

a が 0 の ω_{2a} は、0 になってしまうので使いません。

ω_{2a} をくくり出した形、$\omega_{2a}{}^2(s^2+\frac{1}{\omega_{2a}{}^2})$ で、

$$s^2+\frac{1}{\omega_{2a}{}^2} = (s+j\frac{1}{\omega_{2a}})(s-j\frac{1}{\omega_{2a}}) = 0$$

と置き＝0 の根を求めますと、$s=\pm j\frac{1}{\omega_{2a}}$ になります。

また、角周波数が 0 つまり s＝0 を入力した時の利得が 1 になる様に、括弧の前に $\omega_{2a}{}^2$ の定数項が付きます。

(3)n が奇数の場合の伝達関数のまとめ

伝達関数は、

$$\frac{1}{s+a_0}\prod_{a=1}^{\frac{n}{2}}\frac{\omega_{2a}{}^2(s^2+\frac{1}{\omega_{2a}{}^2})}{s^2+\frac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a}{}^2)(1-k\omega_{2a}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2)}s+\frac{a_0{}^2+\omega_{2a}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a}{}^2}}$$

です。a は 1 から $\frac{n}{2}$ 未満の自然数です。伝達関数を作るには a_0 と ω_{2a} と k を求めれば良いです。このままの伝達関数では角周波数 0 で利得が 1 になりません。「伝達関数の利得と周波数の調整」の章へ続きます。

2、n が偶数の場合の伝達関数

(1) 分母の伝達関数

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗は偶関数です。偶関数の場合、一部の根さえ発見出来れば、他の根は計算によって芋づる式に出て来ます。周波数伝達関数から伝達関数への章をご覧下さい。見いだすべき根の数について、以下の表にまとめました。

根の数と見いだすべき根の数

n	周波数伝達関数の次数	周波数伝達関数の 2 乗の次数	純虚数根数	複素数根数	見いだすべき純虚数根数	見いだすべき複素数根数
4	4	8	0	8	0	2
6	6	12	0	12	0	3
8	8	16	0	16	0	4
10	10	20	0	20	0	5
12	12	24	0	24	0	6
14	14	28	0	28	0	7

n が偶数の場合、複素数の共役根しか出ません。

複素平面左半面の s の根は、複素平面上半面の ω の根であり、複素平面上半面左右の ω の根が、s の共役根になります。

共役根はあとで生成出来ますから、根としては複素平面上半面右側、つまり複素平面第 1 象限の ω 根のみ発見出来れば良いです。

その条件は、変数の実数部が 0～K、虚数部が 0～K'までの sn の値は、複素平面第 1 象限全体に写像される（「ヤコビの楕円関数」の章 46 ページをご参照下さい）ことから、②式、

$$\omega = \sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2a-1}{n}K + j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$$

a＝1,2,3,4･･･

の sn の変数実数部が、$0<\frac{2a-1}{n}K<K$ 、変数虚数部が、$0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$、を満たせば良いです。この不等式に等号が入りますと、sn の値が実軸上または虚軸上の値になることです。その場合は複素数根になりませんので不都合です。全部不等号になります。

実数部の不等式、$0<\frac{2a-1}{n}K<K$ を解きます。正の数 n を掛けますと、

$0<(2a-1)K<Kn$ になります。正の数 $\frac{1}{K}$ を掛けますと、$0<(2a-1)<n$ になります。正の数 1 を足しますと、$1<2a<n+1$ になります。正の数 $\frac{1}{2}$ を掛けますと、$\frac{1}{2}<a<\frac{n+1}{2}$ になります。a は 1 から $\frac{n+1}{2}$ までの自然数を取れば、見いだすべき根の数と一致します。

n が奇数の場合で検証しました様に、変数虚数部の、$0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ も成り立ちます。

②式の様に sn の変数が複素数の場合、複素数加法定理の式で sn の値を求めるのが常道です。楕円関数の複素数変数加法定理の式を提示します。

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u+jv,k) &= \frac{\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{cn}(jv,k)\mathrm{dn}(jv,k)+\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(jv,k)}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(iv,k)} \\
&= \frac{\mathrm{sn}(u,k)\frac{1}{\mathrm{cn}(v,k')}\frac{\mathrm{dn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}+j\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\frac{\mathrm{sn}(v,k')}{\mathrm{cn}(v,k')}}{1+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\frac{\mathrm{sn}^2(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')}} \\
&= \frac{\mathrm{sn}(u,k)\mathrm{dn}(v,k')+j\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)\mathrm{sn}(v,k')\mathrm{cn}(v,k')}{\mathrm{cn}^2(v,k')+k^2\mathrm{sn}^2(u,k)\mathrm{sn}^2(v,k')}
\end{aligned}$$

この加法定理の式を解くには、いろいろな sn、cn、dn の値を求める必要があります。

最初に、sn(v,k')、cn(v,k')、dn(v,k')を求めます。$u=\frac{2a-1}{n}K$ 、$v=\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'$ です。

これらを求める為、②式、

$$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(\frac{2a-1}{n}K+j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$$

のうち変数実数部の無い変数が虚数部のみの、$\omega=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)$ を求めます。n が奇数の場合の、純虚数根 ja_0 を求めた時と同じです。

$$ja_0=\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\left(j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right)=j\sqrt{k}\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

$$a_0 = \sqrt{k}\,\frac{sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

となります。n が奇数の場合で検証しました楊に、分母の cn の変数、$\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'$は、

$0<\frac{2K}{n\pi}z_0K_1'<K'$ を満たし、

$$cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \sqrt{1-sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}$$

となりますので、

$$a_0 = \sqrt{k}\,\frac{sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}{\sqrt{1-sn^2\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right)}}$$

になります。以下 n が奇数の場合と同様に、

$$sn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \frac{a_0}{\sqrt{a_0{}^2+k}}$$

$$cn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \sqrt{\frac{k}{a_0{}^2+k}}$$

$$dn\left(\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k'\right) = \sqrt{\frac{k(1+ka_0{}^2)}{a_0{}^2+k}}$$

となります。

次は、sn(u,k)、cn(u,k)、dn(u,k)です。「連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の 2 乗の因数分解」の章 2 ページに書きました様に、

$$\omega_{2a-1} = \sqrt{k}\,sn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)$$

ですから、

$$sn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right) = \frac{\omega_{2a-1}}{\sqrt{k}}$$

です。

n が偶数の場合、a は 1 から $\frac{n+1}{2}$ までの自然数しか採りませんから、$-K < \frac{2a-1}{n}K < K$ が成り立ちます。この場合、$cn(u,k) = cn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)$、$dn(u,k) = dn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)$ を $sn(u,k) = sn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right) = \frac{\omega_{2a-1}}{\sqrt{k}}$ で表すことが出来ます。

$$
\begin{aligned}
cn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right) &= \sqrt{1-sn^2\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)} \\
&= \sqrt{1-\left(\frac{\omega_{2a-1}}{\sqrt{k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{k-\omega_{2a-1}{}^2}{k}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right) &= \sqrt{1-k^2sn^2\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)} \\
&= \sqrt{1-k^2\left(\frac{\omega_{2a-1}}{\sqrt{k}}\right)^2} \\
&= \sqrt{1-k\omega_{2a-1}{}^2}
\end{aligned}
$$

となります。以上の結果を ω を求める②式に代入し、整理しますと、

$$
\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{k}sn\left(\frac{2a-1}{n}K + j\frac{2K}{n\pi}z_0K_1',k\right) \\
&= \sqrt{k}\,\frac{sn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)dn\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right) + jcn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)dn\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)sn\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right)cn\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right)}{cn^2\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right) + k^2sn^2\left(\frac{2a-1}{n}K,k\right)sn^2\left(\frac{2Kz_0K_1'}{n\pi},k'\right)} \\
&= \frac{\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)} + ja_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}
\end{aligned}
$$

になります。これが、n が偶数の場合の複素数の ω の根 4 ペアのうちの、複素平面第 1 象

限内にある根です。

この根に対応する s の根は j を掛け 90 度反時計式に回転させたものです。これが複素平面第 2 象限にある s の根、A になります。

$$A = j \bullet \frac{\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)} + ja_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a\text{-}1}{}^2)}$$

$$= \frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)} + j\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}$$

この根の共役 $\overline{A}$ は第 3 象限にある次の根です。

$$\overline{A} = \frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)} - j\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}$$

この 2 つの根から出来る 2 次因数は、$(s-A)(s-\overline{A}) = s^2-(A+\overline{A})s + A \bullet \overline{A}$ となりますので、$A+\overline{A}$ を計算しますと、

$$A+\overline{A} = \frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)} + j\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)} +$$

$$\frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)} - j\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}$$

$$= \frac{-2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}$$

になります。一方 $A \bullet \overline{A}$ を計算しますと、

$$A \bullet \overline{A} = \frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)} + j\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)} \bullet$$

$$\frac{-a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}-j\omega_{2a-1}\sqrt{(1+ka_0{}^2)(a_0{}^2+k)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}$$

$$=\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}$$

になります。したがって、求める伝達関数分母の 2 次因数は、

$$s^2+\frac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}s+\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}$$

となります。これを a＝1 から a＜$\frac{n+1}{2}$の自然数で繰り返せば良いです。

(2)分子の伝達関数

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗の分子は、

$$(\omega_{2a-1}{}^2\omega^2-1)^2$$

です。ω_{2a-1}は、「連立チェビシェフフィルター周波数伝達関数の 2 乗の因数分解」の章 2 ページの表の各零点から決定されます。この式を次のように変形します。

$$\begin{aligned}
&(\omega_{2a-1}{}^2\omega^2-1)^2\\
&=(\omega_{2a-1}{}^2\omega^2-1)(\omega_{2a-1}{}^2\omega^2-1)\\
&=(\omega_{2a-1}\omega-1)(\omega_{2a-1}\omega+1)(\omega_{2a-1}\omega-1)(\omega_{2a-1}\omega+1)\\
&=(-1)(1-\omega_{2a-1}\omega)(1+\omega_{2a-1}\omega)(-1)(1-\omega_{2a-1}\omega)(1+\omega_{2a-1}\omega)\\
&=(1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2)(1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2)\\
&=(1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2)^2
\end{aligned}$$

伝達関数にさかのぼった式の s に jω と－jω を代入し、掛け合わせた時に、この最後の式が再現されなければなりません。

伝達関数にさかのぼる為、s＝jω ならば$\omega=\frac{s}{j}$ 、s＝－jω ならば$\omega=-\frac{s}{j}$ですから、括弧内の式、$1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2$にこれらを代入して見ます。$\omega=\frac{s}{j}$の時は、

$$[1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2]_{\omega=\frac{s}{j}}$$

$$=1-\omega_{2a-1}{}^2(\frac{s}{j})^2$$

$$=1+\omega_{2a-1}{}^2s^2$$

となり、$\omega=-\frac{s}{j}$ の時は、

$$[1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2]_{\omega=-\frac{s}{j}}$$

$$=1-\omega_{2a-1}{}^2(-\frac{s}{j})^2$$

$$=1+\omega_{2a-1}{}^2s^2$$

となります。どちらも同じです。伝達関数にさかのぼったであろう、$1+\omega_{2a-1}{}^2s^2$ に、s＝jω および s＝－jω を代入して見ますと、

$$[1+\omega_{2a-1}{}^2s^2]_{s=j\omega}=1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2$$

$$[1+\omega_{2a-1}{}^2s^2]_{s=-j\omega}=1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2$$

になります。両者を掛け合わせますと、

$$(1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2)(1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2)=(1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2)^2$$

になります。s に jω と－jω を代入し、掛け合わせた時に、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗の分子、$(1-\omega_{2a-1}{}^2\omega^2)^2$ が再現されることが分ります。

したがって伝達関数の分子は、$1+\omega_{2a-1}{}^2s^2$ か、$\omega_{2a-1}{}^2s^2+1$、または ω_{2a-1} をくくり出した形の、$\omega_{2a-1}{}^2(s^2+\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2})$ になります。これを a＝1 から a＜$\frac{n+1}{2}$ の自然数で繰り返せば良いです。

ω_{2a-1} をくくり出した形、$\omega_{2a-1}{}^2(s^2+\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2})$ で、

$$s^2+\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}=(s+j\frac{1}{\omega_{2a-1}})(s-j\frac{1}{\omega_{2a-1}})=0$$

と置き＝0 の根を求めますと、$s = \pm j\frac{1}{\omega_{2a-1}}$ となります。

また、角周波数が 0 つまり s＝0 を入力した時の利得が 1 になる様に、括弧の前に $\omega_{2a-1}{}^2$ の定数項が付きます。

(3)n が偶数の場合の伝達関数のまとめ

伝達関数は、

$$\prod_{a=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{\omega_{2a-1}{}^2\left(s^2+\frac{1}{\omega_{2a-1}{}^2}\right)}{s^2+\frac{2a_0\sqrt{(k-\omega_{2a-1}{}^2)(1-k\omega_{2a-1}{}^2)}}{\sqrt{k}(1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2)}s+\frac{a_0{}^2+\omega_{2a-1}{}^2}{1+a_0{}^2\omega_{2a-1}{}^2}}$$

です。a は 1 から $\frac{n+1}{2}$ 未満の自然数です。伝達関数を作るには a_0 と ω_{2a-1} と k を求めれば良いです。

このままの伝達関数では角周波数 0 で利得が 1 になりません。「伝達関数の利得と周波数の調整」の章に続きます。

目次へ戻る