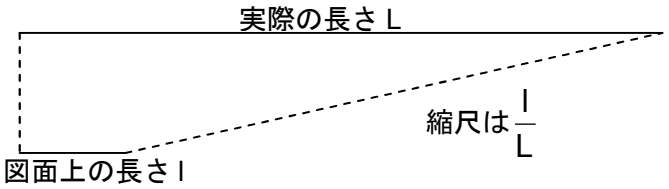
スケーリング　　2007 年 8 月 7 日　　目次へ戻る

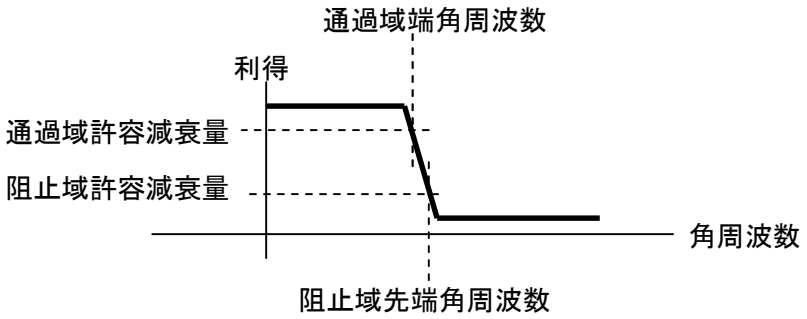
1、正規化のための周波数スケーリング

地図、建築図面、機械図面等には縮尺があります。縮尺は 5 万分の 1、100 分の 1、10 分の 1 など用途により各種あります。

土木、建築、機械などの設計では、図面上でいろいろな検討が行われます。



フィルターの設計にも縮尺があります。フィルターの設計では、それぞれのフィルター仕様ごとに縮尺を変えることにより、通過域端角周波数を常に 1[rad/sec]に縮小します。



例えば、通過域端の実周波数が 1000[Hz]だとすれば、通過域端の角周波数 (2×π×周波数) は、2×3.14×1000 で約 6283[rad/sec]になります。これを 1[rad/sec]に縮小しますから、

$$\text{縮尺} = \frac{1[\text{rad} / \text{sec}]}{6283\ [\text{rad} / \text{sec}]} = \frac{1}{6283}$$

です。但し、逆チェビシェフフィルター及び連立チェビシェフフィルターでは、通過域端角周波数が 1[rad/sec]にならない縮尺を使用します。理由はその章で記述します。

通過域端角周波数以外の各角周波数にも縮尺を掛け、6283 分の 1 にします。例えば阻止域先端角周波数等で行います。これを正規化と呼びます。正規化しておけば、周波数伝達関数を作る際の関数が作り易くなります。また、応用力のある設計が出来ます。

2、素子値の周波数スケーリング

設計が進み、通過域端角周波数が 1[rad/sec]で正規化されたフィルター回路の素子値が決

定されました。この素子値を実周波数用に直すことを考えます。

回路を構成する L、C、R のインピーダンスは、正規化されたある角周波数 ω_0 において、それぞれ $j\omega_0 L$、 $\frac{1}{j\omega_0 C}$、R です。つまり、コイルの L は角周波数に比例、コンデンサーの C は角周波数に反比例、抵抗の R は角周波数に無関係です。

ω_0 に対応する実角周波数 ω_1 において、ω_0 と同じインピーダンスを持たせるには、新しい素子 L_1、C_1、R_1 に次の等式が成り立てば良いです。つまり、

$$j\omega_1 L_1 = j\omega_0 L$$

$$\frac{1}{j\omega_1 C_1} = \frac{1}{j\omega_0 C}$$

$$\therefore\ j\omega_1 C_1 = j\omega_0 C$$

$$R_1 = R$$

です。したがって、

$$L_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} L$$

$$C_1 = \frac{\omega_0}{\omega_1} C$$

$$R_1 = R$$

となります。

これにより、L、C、R を使用した回路に ω_0 を入力した時の出力は、L_1、C_1、R_1 を使用した同一回路に ω_1 を入力した時の出力の大きさと同じになります。

同じインピーダンスが成り立つためです。今までの ω_0 を ω_1 に上げることが出来るので、周波数の拡大です。つまり角周波数特性を $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ 倍するためには、R はそのまま、L と C を $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ 倍すれば良いです。その時、今までの角周波数特性の全ての地点が、$\frac{\omega_1}{\omega_0}$ 倍された地点での角周波数特性に移ります。

例えば、通過域端角周波数が 1[rad/sec]で設計された回路を、通過域端実周波数 1000[HZ]にする方法は以下の通りです。

実周波数の角周波数は、$\omega_1 = 2\pi \times 1000 = 6283$[rad/sec] です。各素子が、6283[rad/sec]で 1[rad/sec]と同じインピーダンスを持つようにすれば良いです。したがって、

抵抗値は周波数に無関係なので正規化設計値と同じ値です。

コイルのインピーダンスは 1[rad/sec]の 6283 倍されてしまうので、正規化設計値の $\frac{1}{6283}$ のインダクタンスを持ったコイルにします。

コンデンサーのインピーダンスは 1[rad/sec]の $\frac{1}{6283}$ になってしまうので、正規化設計値の $\frac{1}{6283}$ の容量を持ったコンデンサーにします。つまり 6283[rad/sec]で 1[rad/sec]と同じインピーダンスを持たせる為に、もともとの容量を小さくし、インピーダンスを上げておきます。

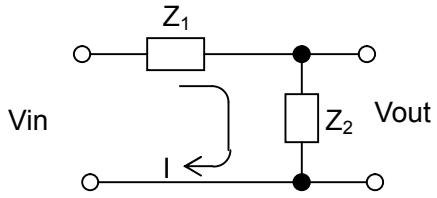
1[rad/sec]での C のインピーダンスと、6283[rad/sec]での C_1 のインピーダンスを式で表しますと、

$$\frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j1C} = \frac{1}{j\omega_1 C_1} = \frac{1}{j6283 \bullet \frac{C}{6283}} = \frac{1}{j1C}$$

が成り立ちますから、正規化設計素子値の $\frac{1}{6283}$ の容量のコンデンサーで良いです。

3、素子値の数値スケーリング

周波数のスケーリングだけでは、抵抗値が小さくなり実用的ではないです。これでは都合が悪いので、素子値の数値スケーリングを行います。次の分圧回路を考えます。



この回路では

$$Vin = (Z_1 + Z_2)I \text{、} \quad Vout = Z_2 I$$

が成り立っています。$\frac{Vout}{Vin}$ を求めると、

$$\frac{Z_2 I}{(Z_1 + Z_2)I} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}}$$

となります。この式は、分母の分数 $\frac{Z_1}{Z_2}$ において分子の Z_1 と分母の Z_2 に同じ係数が付いても、入出力特性が変わらないことを表しています。オペアンプを使用した回路でも、すべてこの分圧回路が応用されているので当てはまります。すべてのインピーダンスが同倍されれば、入出力特性は変わりません。

したがって、周波数スケーリングを行った素子値に対しこの原理を応用した、数値スケ

ーリングを行うことが出来ます。

変更前の素子値をそれぞれ R_1 、L_1 、C_1 とします。

変更後の素子値を R_2、 L_2 、C_2 とします。

R_1 を $\frac{R_2}{R_1}$ 倍にした場合、

L_1 のインピーダンスの $\frac{R_2}{R_1}$ 倍が、L_2 のインピーダンスになる必要があります。したがって、

$$\frac{R_2}{R_1} \bullet 2\pi f L_1 = 2\pi f L_2$$

$$L_2 = \frac{R_2}{R_1} L_1$$

が成り立ちます。つまり L_2 には、$\frac{R_2}{R_1}$ 倍のインダクタンスを持ったコイルを使用します。

C_1 のインピーダンスの $\frac{R_2}{R_1}$ 倍が、C_2 のインピーダンスになる必要があります。したがって、

$$\frac{R_2}{R_1} \bullet \frac{1}{2\pi f C_1} = \frac{1}{2\pi f C_2}$$

$$\frac{R_2}{R_1} \bullet \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2}$$

$$R_2 C_2 = R_1 C_1$$

$$C_2 = \frac{R_1}{R_2} C_1$$

が成り立ちます。つまり C_2 には、$\frac{R_1}{R_2}$ 倍の容量を持ったコンデンサーを使用します。

これらの作業を行うことにより、すべてのインピーダンスが同倍されます。

4、スケーリングのまとめ

簡単に設計する為に、通過域端角周波数が 1[rad/sec]の正規化設計を行います。回路まで設計後、素子値の周波数スケーリングで実周波数に持って来ます。その後、素子値の数値スケーリングを行い、素子値を実用的な範囲にまとめます。

(1)素子値の周波数スケーリング

角周波数を $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ に変えたい場合:R はそのまま、L と C は $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ 倍

(2)素子値の数値スケーリング:

抵抗値を $\frac{r_1}{r_0}$ に変えたい場合:R と L は $\frac{r_1}{r_0}$ 倍、C は $\frac{r_0}{r_1}$ 倍

です。

実際の例は、「はしご型 LC フィルターのスケーリング」の章にあります。

目次へ戻る