スケーリングと伝達関数　　2017 年 8 月 28 日　目次へ戻る

スケーリングを実行すると、伝達関数は、どの様に変わるのでしょうか。はしご型 L C フィルターをスケーリングして、伝達関数の変化を見ます。

スケーリングの章で検討しました通り、

①周波数スケーリング

周波数を $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ に変えたい場合:R はそのまま、L と C は $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ 倍

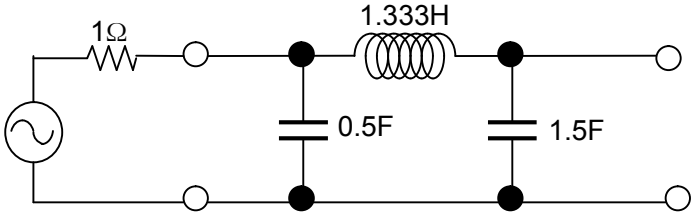
②数値スケーリング:

抵抗値を $\frac{r_1}{r_0}$ に変えたい場合:R と L は $\frac{r_1}{r_0}$ 倍、C は $\frac{r_0}{r_1}$ 倍

です。

1、スケーリング前の回路と伝達関数

正規化設計の R－∞型、3 次バタワースフィルターです。はしご型 LC フィルターの章で説明致しました。回路は下記の通りです。



スケーリングを行う前に、現在の伝達関数を求めます。R－∞型ですから、1Ω を含めた四端子定数を求めますと、四端子定数 A の位置の値が伝達関数の逆数になるのでした。1Ω の左から右側を見た時の四端子定数を計算します。四端子定数の求め方は、四端子回路の章をご覧下さい。四端子定数は、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1.333s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1.5s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^3 + 2s^2 + 2s + 1 & 0.667s^2 + 1.333s + 1 \\ s^3 + 2s & 0.667s^2 + 1 \end{bmatrix}$$

となります。伝達関数 G(s)は、A の位置の値の逆数ですから、

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

です。因数分解致しますと、

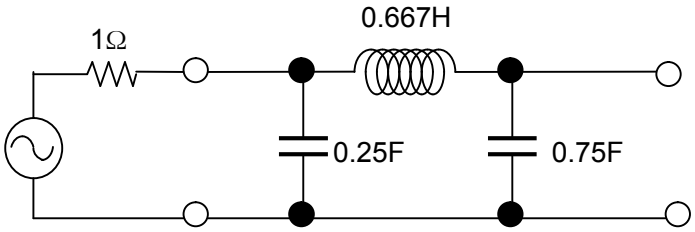
$$G(s)=\frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2})(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

になります。分母の根は－1、$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$、$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ です。

2、周波数のスケーリングと伝達関数

正規化設計では－3[dB]になる角周波数が 1[rad/sec]です。－3[dB]になる角周波数を、2[rad/sec]にしたいと思います。

周波数のスケーリングだけを行います。上記①の ω_0 が 1[rad/sec]、ω_1 が 2[rad/sec]になります。R はそのまま、L と C は $\frac{\omega_0}{\omega_1}$ 倍ですから、L と C をそれぞれ $\frac{1}{2}$ にします。回路は下記の様になります。



四端子定数を求めますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.25s & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.667s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.75s & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.125s^3+0.5s^2+s+1 & 0.167s^2+0.667s+1 \\ 0.125s^3+s & 0.167s^2+1 \end{bmatrix}$$

になります。伝達関数 G(s)は、A の位置の値の逆数ですから、

$$G(s)=\frac{1}{0.125s^3+0.5s^2+s+1}$$

です。因数分解致しますと、

$$=\frac{1}{0.125\,(s^3+4s^2+8s+8)}$$

$$=\frac{8}{s^3+4s^2+8s+8}$$

$$=\frac{8}{(s+2)(s^2+2s+4)}$$

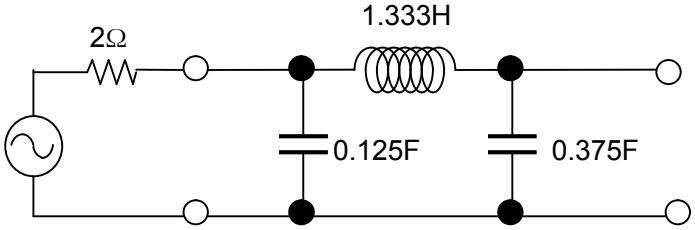
$$= \frac{8}{(s+2)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})}$$

になります。分母の根は－2、$-1-\sqrt{3}$ 、$-1+\sqrt{3}$ です。ω_0 が 1[rad/sec]、ω_1 が 2[rad/sec]の周波数スケーリングを行いますと、分母の根は全部 2 倍され、分子には角周波数 0 (s=0)で利得が 1 になる様に、自動的に定数が付きます。

3、数値のスケーリングと伝達関数

周波数のスケーリングをした状態では、抵抗の値が 1[Ω]です。これを 2[Ω]にしたいと思います。

数値のスケーリングだけを行います。上記②の r_0 が 1[Ω]、r_1 が 2[Ω]になります。したがって R は 2[Ω]、 L は $\frac{r_1}{r_0}$ 倍ですから 2 倍、C は $\frac{r_0}{r_1}$ 倍ですから $\frac{1}{2}$ にします。回路は下記の様になります。



四端子定数を求めますと、

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.125s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1.333s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.375s & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.125s^3 + 0.5s^2 + s + 1 & 0.33325s^2 + 1.333s + 2 \\ 0.0625s^3 + 0.5s & 0.166625s^2 + 1 \end{bmatrix}$$

になります。伝達関数 G(s)は、A の位置の値の逆数ですから、

$$G(s) = \frac{1}{0.125s^3 + 0.5s^2 + s + 1}$$

です。因数分解致しますと、

$$= \frac{1}{0.125\,(s^3 + 4s^2 + 8s + 8)}$$

$$= \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 8s + 8}$$

$$= \frac{8}{(s+2)(s^2 + 2s + 4)}$$

$$= \frac{8}{(s+2)(s+1+j\sqrt{3})(s+1-j\sqrt{3})}$$

になります。分母の根は−2、$-1-\sqrt{3}$ 、$-1+\sqrt{3}$ です。周波数スケーリング後と同じです。

数値スケーリングを行いましても、伝達関数は変わりません。

4、まとめ

①周波数スケーリング後

伝達関数の根が全て $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ 倍されます。

②数値スケーリング後

伝達関数は変わりません。

目次へ戻る