周波数伝達関数から伝達関数へ　　2008 年 12 月 16 日　目次へ戻る

1、f 特と ω 特

オーディオの世界で f 特と言いますと、周波数特性のことで「20[kHz]で出力が 1[dB]下がる」等と使います。入力の周波数によって、増幅の度合いが変化することを表しています。

フィルターの世界では 1 [Hz]を 1 回転と考え、周波数 f を 2π 倍して 1 秒間に何ラディアン回るかを表す、角周波数 ω (オメガ)＝2πf［rad/sec ラディアン毎秒］を使います。

「s＝jω とは何か」の章において簡単な回路で説明しましたが、ラプラス変換後の $\frac{\text{出力電圧}}{\text{入力電圧}}$ が伝達関数です。伝達関数として G(s) (G は Gain の略)を持つ回路に、最大値 V_m 角周波数 ω の正弦波 $V_m\sin\omega t$ を入力しますと、

①、正弦波は伝達関数 G(s)の s に＋jω を代入した、周波数伝達関数 G(＋jω)の絶対値倍されて出力されます。

②、または、伝達関数 G(s)の s に－jω を代入した、周波数伝達関数 G(－jω)の絶対値倍されて出力されます。

Re を複素数の実数部、Im を複素数の虚数部として、

$$|G(+j\omega)| = \sqrt{\{\mathrm{Re}\ G(+j\omega)\}^2 + \{\mathrm{Im}\ G(+j\omega)\}^2} = |G(-j\omega)| = \sqrt{\{\mathrm{Re}\ G(-j\omega)\}^2 + \{\mathrm{Im}\ G(-j\omega)\}^2}$$

が周波数伝達関数の絶対値です。「s＝jω とは何か」の章をご参照下さい。

周波数伝達関数の絶対値、|G(＋jω)|または|G(－jω)|を、当 HomePage では ω 特と呼ぶことがあります。但し ω 特は当 HomePage 以外では通用しない言葉ですので、ご注意下さい。

2、複素数に関する重要な性質

今後の内容につなげる為、ここで複素数の重要な性質のことを書きます。

重要な性質とは、「いくつかの複素数に四則演算を行って出来た複素数の共役（きょうやく）は、初めの各複素数の共役（きょうやく）に同じ四則演算を行って出来る複素数に等しい。」と言うものです。共役（きょうやく）とは複素数の虚数部の＋－を反転したものです。実数部の＋－はそのままです。

$A=x_1+jy_1$、$B=x_2+jy_2$、$C=x_3+jy_3$ とします。四則演算について上記の性質を検証して行きます。理解されている方は 3、へお進み下さい。

(1)足し算

最初は足し算です。(A＋B)の共役は、

$$\overline{A+B} = \overline{(x_1+jy_1)+(x_2+jy_2)} = \overline{(x_1+x_2)+j(y_1+y_2)} = (x_1+x_2)-j(y_1+y_2)$$

となります。共役を表す為に、式の上に棒を置きます。

(A の共役)＋(B の共役)は、

$$\overline{A}+\overline{B}=x_1-jy_1+x_2-jy_2=(x_1+x_2)-j(y_1+y_2)$$

となります。したがって、$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$ です。

問、$\overline{A+B+C}$ と $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ を求めて下さい。

答、$\overline{A+B+C}=\overline{(x_1+jy_1)+(x_2+jy_2)+(x_3+jy_3)}$

$$=\overline{(x_1+x_2+x_3)+j(y_1+y_2+y_3)}=(x_1+x_2+x_3)-j(y_1+y_2+y_3)$$

$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=x_1-jy_1+x_2-jy_2+x_3-jy_3=(x_1+x_2+x_3)-j(y_1+y_2+y_3)$$

$$\therefore\overline{A+B+C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$$

結論：計算は省略しますが、$\overline{A+B+C\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ が成り立ちます。

(2)引き算

次は引き算です。(A－B)の共役は、

$$\overline{A-B}=\overline{(x_1+jy_1)-(x_2+jy_2)}=\overline{(x_1-x_2)+j(y_1-y_2)}=(x_1-x_2)-j(y_1-y_2)$$

となります。(A の共役)－(B の共役)は、

$$\overline{A}-\overline{B}=x_1-jy_1-(x_2-jy_2)=x_1-jy_1-x_2+jy_2=(x_1-x_2)-j(y_1-y_2)$$

となります。したがって、$\overline{A-B}=\overline{A}-\overline{B}$ です。

問、$\overline{A-B-C}$ と $\overline{A}-\overline{B}-\overline{C}$ を求めて下さい。

答、$\overline{A-B-C}=\overline{(x_1+jy_1)-(x_2+jy_2)-(x_3+jy_3)}$

$$=\overline{(x_1-x_2-x_3)+j(y_1-y_2-y_3)}=(x_1-x_2-x_3)-j(y_1-y_2-y_3)$$

$$\overline{A}-\overline{B}-\overline{C}=x_1-jy_1-(x_2-jy_2)-(x_3-jy_3)$$

$$=x_1-jy_1-x_2+jy_2-x_3+jy_3=(x_1-x_2-x_3)-j(y_1-y_2-y_3)$$

$$\therefore\overline{A-B-C}=\overline{A}-\overline{B}-\overline{C}$$

結論：計算は省略しますが、$\overline{A-B-C\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet}=\overline{A}-\overline{B}-\overline{C}\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ が成り立ちます。

(3)かけ算

次は、かけ算です。(A・B)の共役は、

$$\overline{A\bullet B}=\overline{(x_1+jy_1)(x_2+jy_2)}=\overline{x_1x_2+jx_1y_2+jx_2y_1-y_1y_2}=(x_1x_2-y_1y_2)-j(x_1y_2+x_2y_1)$$

となります。(A の共役)・(B の共役)は、

$$\overline{A}\bullet\overline{B}=(x_1-jy_1)(x_2-jy_2)=x_1x_2-jx_1y_2-jx_2y_1-y_1y_2=(x_1x_2-y_1y_2)-j(x_1y_2+x_2y_1)$$

となります。したがって、$\overline{A\bullet B}=\overline{A}\bullet\overline{B}$ です。

問、$\overline{A \bullet B \bullet C}$ と $\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}$ を求めて下さい。

答、$\overline{A \bullet B \bullet C} = \overline{(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)(x_3 + jy_3)} = \overline{(x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 - y_1y_2)(x_3 + jy_3)}$

$$= \overline{(x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3) + j(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)}$$

$$= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3) - j(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)$$

$$\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} = (x_1 - jy_1)(x_2 - jy_2)(x_3 - jy_3) = (x_1x_2 - jx_1y_2 - jx_2y_1 - y_1y_2)(x_3 - jy_3)$$

$$= (x_1x_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3 - y_1y_2x_3) - j(x_1x_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3 - y_1y_2y_3)$$

$$\therefore \overline{A \bullet B \bullet C} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}$$

結論：計算は省略しますが、$\overline{A \bullet B \bullet C \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ が成り立ちます。

(4)累乗

積を繰り返すと累乗になります。

$$\overline{A \bullet A} = \overline{(x_1 + jy_1)(x_1 + jy_1)} = \overline{x_1x_1 + j2x_1y_1 - y_1y_1} = x_1^2 - y_1^2 - j2x_1y_1$$

$$\overline{A} \bullet \overline{A} = (x_1 - jy_1)(x_1 - jy_1) = x_1x_2 - j2x_1y_1 - y_1y_1 = x_1^2 - y_1^2 - j2x_1y_1$$

となりますので $\overline{A \bullet A} = \overline{A} \bullet \overline{A}$ です。

問、$\overline{A \bullet A \bullet A}$ と $\overline{A} \bullet \overline{A} \bullet \overline{A}$ を求めて下さい。

答、

$$\overline{A \bullet A \bullet A} = \overline{(x_1 + jy_1)(x_1 + jy_1)(x_1 + jy_1)} = \overline{x_1^3 - 3x_1y_1^2 + j(3x_1^2y_1 - y_1^3)} = x_1^3 - 3x_1y_1^2 - j(3x_1^2y_1 - y_1^3)$$

$$\overline{A} \bullet \overline{A} \bullet \overline{A} = (x_1 - jy_1)(x_1 - jy_1)(x_1 - jy_1) = x_1^3 - 3x_1y_1^2 - j3x_1^2y_1 + jy_1^3 = x_1^3 - 3x_1y_1^2 - j(3x_1^2y_1 - y_1^3)$$

$$\therefore \overline{A \bullet A \bullet A} = \overline{A} \bullet \overline{A} \bullet \overline{A}$$

結論：計算は省略しますが、$\overline{A^n} = \left(\overline{A}\right)^{-n}$ が成り立ちます。

(5)分数

次は割り算としての分数です。

$$X = \frac{B}{A}$$

とおくと、$B = A \bullet X$ です。(3)のかけ算の結論から、$\overline{B} = \overline{A} \bullet \overline{X}$ ですから、

$$\overline{X} = \frac{\overline{B}}{\overline{A}}$$

となります。したがって、$\overline{\left(\frac{B}{A}\right)} = \frac{\overline{B}}{\overline{A}}$ が成り立ちます。

(6)逆数

逆数の場合、$X = \frac{1}{A}$

とおくと、$1 = A \bullet X$ です。(3)のかけ算の結論から、$\overline{1} = \overline{A} \bullet \overline{X}$ です。実数の共役はそのままの実数ですから、$1 = \overline{A} \bullet \overline{X}$ です。

$\overline{X} = \frac{1}{\overline{A}}$ となりますので、

$\overline{(\frac{1}{A})} = \frac{1}{\overline{A}}$ が成り立ちます。

(7)積の逆数

積の逆数の場合、$X = \frac{1}{A \bullet B \bullet C}$

とおくと$1 = A \bullet B \bullet C \bullet X$ です。$\overline{1} = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \overline{X}$ ですから、$1 = \overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C} \bullet \overline{X}$ です。

$$\overline{X} = \frac{1}{\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}}$$

ですので、$\overline{(\frac{1}{A \bullet B \bullet C})} = \frac{1}{\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}}$ が成り立ちます。

(8)積の分数

分子分母が積の分数の場合、

$$\overline{(\frac{X \bullet Y}{A \bullet B \bullet C})} = \overline{X \bullet Y \bullet (\frac{1}{A \bullet B \bullet C})} = \overline{X} \bullet \overline{Y} \bullet \frac{1}{\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}} = \frac{\overline{X} \bullet \overline{Y}}{\overline{A} \bullet \overline{B} \bullet \overline{C}}$$ です。

(9)実数と複素数のかけ算

k が実数の時、$\overline{k \bullet A} = \overline{k(x_1 + jy_1)} = \overline{kx_1 + jky_1} = kx_1 - jky_1$

$\overline{k} \bullet \overline{A} = k\overline{A} = k(x_1 - jy_1) = kx_1 - jky_1$

となります。実数の共役はそのままの実数ですから、$\overline{k \bullet A} = k \bullet \overline{A}$ となります。

(10)まとめ

以上のことから分るのは、

「式に複素数を代入して、出て来る答えの共役」

と

「同じ式にその複素数の共役を代入して、出て来る答え」

は等しいということです。

3、複素数の絶対値

A を複素数 x＋jy、$\overline{A}$ をその共役（きょうやく）x－jy とした場合、かけ算を行いますと、

$$A \bullet \overline{A} = (x + jy)(x - jy) = x^2 - jxy + jxy - j^2y^2 = x^2 + y^2 = |A|^2$$

になります。つまり、複素数 A とその共役複素数 $\overline{A}$ をかけ合わせますと、その複素数の絶対値の 2 乗に等しくなります。

4、周波数伝達関数

2、と 3、の結果を組み合わせますと次のことが言えます。「伝達関数 G(s)の s に複素数 0＋jω＝＋jω を代入して出て来る複素数と、伝達関数 G(s)の s にその共役複素数 0－jω＝－jω を代入して出て来る複素数とは共役（きょうやく）になる。両者をかけ合わせると、出て来る複素数の絶対値の 2 乗になる。」ということです。

1、で周波数伝達関数の絶対値は、

「伝達関数 G(s)の s に＋jω を代入した G(＋jω) の絶対値」または、

「伝達関数 G(s)の s に－jω を代入した G (－jω)の絶対値」

と説明致しましたが、「G(s)の s に＋jω を代入した G(＋jω)と、G(s)の s に－jω を代入した G(－jω)の積の平方根」と言い換えることが出来ます。

正弦波 $V_m \sin\omega t$ を、ある伝達関数の回路に入れますと 1、の①②に続き、

③、過渡時間後、「G(s)の s に＋jω と－jω を代入し、両者を乗じ、平方根にした値」倍の正弦波が出て来る。

と考えられます。つまり、$\omega特 = \sqrt{G(+j\omega)G(-j\omega)}$ が周波数伝達関数の絶対値、ω 特を表す 3 つめの式です。$G(+j\omega)G(-j\omega) = (\omega特)^2$ ということになります。

「s＝jω とは何か」の章 1、において、抵抗とコンデンサーの回路の ω 特を求めました。出力の複素数、$\dfrac{1}{1 + j\omega CR}$ および $\dfrac{1}{1 - j\omega CR}$ の絶対値を求める際、二式とも分母を有理化し、実数部虚数部に分け、実数部虚数部をそれぞれ 2 乗し、足し、平方根を求め、

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

という答えを得ました。2、の(5)(6)で紹介しました分数や逆数の共役によれば、

$$\overline{\frac{1}{1 + j\omega CR}} = \frac{\overline{1}}{\overline{1 + j\omega CR}} = \frac{1}{1 - j\omega CR}$$

なので、$\dfrac{1}{1+j\omega CR}$ と $\dfrac{1}{1-j\omega CR}$ とは共役であることが分かります。伝達関数 G(s)の s に＋jω と－jω を代入しますと、出てくる答えは、お互いに共役関係になります。したがって、$\dfrac{1}{1+j\omega CR}$ と $\dfrac{1}{1-j\omega CR}$ を掛け算し、平方根にすれば良かったのです。「s＝jω とは何か」の章 1、抵抗とコンデンサーの回路の周波数伝達関数の絶対値、ω 特は、

$$\omega特 = \sqrt{\frac{1}{1+j\omega CR} \bullet \frac{1}{1-j\omega CR}} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 C^2 R^2}}$$

です。

普通の人はフィルターとして欲しい周波数伝達関数の絶対値、ω 特という目標があり、それに向けた回路設計、つまり伝達関数設計を行うはずです。目標の ω 特から伝達関数 G(s)にさかのぼる方法が、上の式に隠されています。

それは、「G(s)の s に＋jω と－jω を代入してかけ合わせると、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり ω 特の 2 乗になるような G(s)を見いだせば良い。」ということです。これからその方法について考えますが、いくつか予備知識が必要ですので、それを説明致します。

5、定理の学習

(1)剰余の定理と因数定理

いま x の n 次多項式、

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + a_{n-1} x + a_n$$

を考えて、これを 1 次の多項式 x－A で割ったとすれば、商は x の n－1 次の多項式 Q(x)となり、余りは割る数(x－A)より次数の低い一つの定数 R になります。

たとえば x の 3 次の多項式 $x^3－5x^2＋10x－3$ を x－2 で割れば、

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x + 4 \\
\hline
x - 2 & x^3 - 5x^2 + 10x - 3 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
\cline{2-2}
 & -3x^2 + 10x \\
 & -3x^2 + 6x \\
\cline{2-2}
 & 4x - 3 \\
 & 4x - 8 \\
\cline{2-2}
 & 5
\end{array}$$

となり、$x^2－3x＋4$ が商で、余りは 5 です。これは $x^3－5x^2＋10x－3$ という式が、

$$(x-2)(x^2-3x+4)+5$$

になることを表しています。これらの式と数の間には、

$$P(x) = (x-A)Q(x) + R$$

という関係が成立しています。これは恒等式であり、x のいかなる値でも成立します。ここで x＝A とおけば、

$$P(A) = (A - A)Q(x) + R = 0 + R = R$$

となります。これは P(x)を x－A で割った余りを見い出すのに、P(x)を実際に x－A で割らなくても、P(x)の x のところへ A を代入すれば良いことを示しています。したがって、

①、剰余の定理：x の n 次多項式 P(x)を、x－A で割った余りは、P(x)の x＝A のときの値、P(A)に等しい。

が成り立ちます。そして P(A)＝0 の時、余りは出ませんから、

②、因数定理：x の n 次多項式 P(x)が、x－A で割り切れるための条件は、P(A)＝0 である。

も成り立ちます。以上が、剰余の定理と因数定理です。

(2)実数係数多項式のいろいろな定理

①、実数を係数(a_0～a_n)とする n 次多項式、

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + a_{n-1}x + a_n$$

において、方程式 P(x)＝0 が複素数 A と言う根を持てば、共役 $\overline{A}$ もまた根である。

証明：実数係数多項式 $P(x)$ の共役 $\overline{P(x)}$ は、2、の共役の性質から、

$$\begin{aligned}
\overline{P(x)} &= \overline{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + a_{n-1}x + a_n} \\
&= \overline{a_0x^n} + \overline{a_1x^{n-1}} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + \overline{a_{n-1}x} + \overline{a_n} \\
&= \overline{a_0}(\overline{x})^n + \overline{a_1}(\overline{x})^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + \overline{a_{n-1}}(\overline{x}) + \overline{a_n} \\
&= a_0(\overline{x})^n + a_1(\overline{x})^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + a_{n-1}(\overline{x}) + a_n \qquad \text{（実数だから}\overline{a_n} = a_n\text{）} \\
&= P(\overline{x})
\end{aligned}$$

となります。

P(x)の x に a＋jb を代入し、P(a＋jb)の答えが α＋jβ となる場合、共役 a－jb を代入した P(a－jb)の答えは、答え α＋jβ の共役 α－jβ となります。

a＋jb が方程式 P(x)＝0 の根であれば、P(a＋jb)＝0 つまり α＋jβ＝0 です。0 の共役は 0 ですから P(a－jb)の答え、α－jβ も 0 となります。

方程式 P(x)＝0 が複素数 A と言う根を持てば、共役 $\overline{A}$ もまた根であることが分かります。

②、このとき P(x)が偶関数なら、P(－A)も 0 になり $P(\overline{-A})$ も 0 です。実数係数の偶関数方程式 P(x)＝0 が、複素数 A と言う根を持てば、$\overline{A}$ 、$-A$ 、$-\overline{A}$ もまた根です。$A = a + jb$ 、

$-A = -a - jb$ 、$\overline{A} = a - jb$ 、$\overline{-A} = \overline{-a - jb} = -a + jb = -\overline{A}$ です。

③、さらに、実数を係数(a_0〜a_n)とする n 次多項式に関する次の定理があります。

定理：実数を係数(a_0〜a_n)とする x の n 次多項式は 0 次（定数）、1 次および 2 次の**実数**を係数とする多項式の積に因数分解出来る。

証明：P(x)を実数係数多項式とします。

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + a_{n-1}x + a_n$$

a_0〜a_n が実数と言う事ですが、この式の右辺を a_0 でくくれば、

$P(x) = a_0(x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0})$ となり、0 次の定数 a_0 が出ます。括弧内の各係数は実数 a_0 で割りましたので実数のままです。

$x^n + \frac{a_1}{a_0}x^{n-1} + \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet + \frac{a_{n-1}}{a_0}x + \frac{a_n}{a_0}$ を、あらためて P(x)と置きます。これが 2 次以下の多項式なら何もすることはありません。すでに因数分解出来ています。そこで P(x)の次数は 3 以上だとします。このとき代数学の基本定理により、方程式 P(x)＝0 は必ず根を持ちます。根の一つを A とすれば、因数定理によって P(x)＝(x－A) P'(x)となります。

ここで根 A が実数の場合、実数係数多項式 P(x)が、実数係数多項式(x－A)で割り切れるのですから、答え P'(x)も、実数係数多項式となります。元の多項式より次数が 1 だけ小さい実数係数多項式、P'(x)に対して因数分解を繰り返せば良いです。

もし根 A が複素数の場合、5、(2)①により、P(A)＝0 と同時に $P(\overline{A}) = 0$ が成立します。

A と $\overline{A}$ に対して因数定理を適用しますと、$P(x) = (x - A)(x - \overline{A})P''(x)$ が成り立ちます。ここで P''(x)は、元の多項式より次数が 2 小さい多項式です。

$(x - A)(x - \overline{A}) = x^2 - (A + \overline{A})x + A\overline{A}$ となります。$A = a + jb$ 、$\overline{A} = a - jb$ としますと、

$$A + \overline{A} = a + jb + a - jb = 2a$$
$$A \bullet \overline{A} = (a + jb)(a - jb) = a^2 + jab - jab + b^2 = a^2 + b^2$$

ですので、$(x - A)(x - \overline{A})$ は、$x^2 - 2a + a^2 + b^2$ となり、2 次の実数係数多項式です。

実数係数多項式 P(x)が 2 次の実数係数多項式、$(x - A)(x - \overline{A})$ で割り切れるのですから、答え P''(x)も、実数係数多項式となるはずです。元の多項式より次数が 2 だけ小さい実数係数多項式、P''(x)に対して因数分解を繰り返せば良いです。

繰り返しの度に次数が低下し、やがて 1 次あるいは 2 次の実数係数多項式が残り、定理の証明が終了します。x の実数係数 n 次多項式は、必ず 0 次（定数）並びに 1 次や 2 次の実数係数多項式に因数分解出来ます。

④、このとき P(x)が偶関数であり、A が複素数ならば P(A)＝0 と同時に$P(\overline{A})=0$、$P(-A)=0$、$P(-\overline{A})=0$ も成立しますから、根 A と根$\overline{A}$、根－A、根－$\overline{A}$ に対して、因数定理を適用しますと、$P(x)=(x-A)(x-\overline{A})(x+A)(x+\overline{A})P''''(x)$ が成り立ちます。$P''''(x)$ は、元の多項式より次数が 4 小さい多項式です。

$(x-A)(x-\overline{A})(x+A)(x+\overline{A})$ の部分を取り出します。複素数根 A を a＋jb、$\overline{A}$ を a－jb、－A を－a－jb、$\overline{-A}=-a+jb=-\overline{A}$ とし、共役どうしの根で因数を作りますと、

$$(x-A)(x-\overline{A})=(x-a-jb)(x-a+jb)=x^2+2ax+a^2+b^2$$
$$(x+A)(x+\overline{A})=(x+a+jb)(x+a-jb)=x^2-2ax+a^2+b^2$$

になります。2 つの 2 次式が出来ます。最初の 2 次式に－x を代入しますと、

$$(-x)^2+2a(-x)+a^2+b^2=x^2-2ax+a^2+b^2$$

になり、後ろの 2 次式と同じものが出来ます。後ろの 2 次式に－x を代入しますと、

$$(-x)^2-2a(-x)+a^2+b^2=x^2+2ax+a^2+b^2$$

になり、最初の 2 次式と同じものが出来ます。

最初の 2 次式と後ろの 2 次式との積を作りますと、x に x を代入しても、x に－x を代入しても答えは同じになります。$(x-A)(x-\overline{A})(x+A)(x+\overline{A})$ は偶関数を表しています。

⑤、P(x)が偶関数であり、A が純虚数になった場合を考えます。

この場合、複素数根と同じく P(A)＝0、$P(\overline{A})=0$、P(－A)＝0、$P(-\overline{A})=0$ が一応成立しますが、A と－$\overline{A}$、$\overline{A}$ と－A は同じ値になります。例えば純虚数 A を jb としますと、$-\overline{jb}=-(-jb)=jb$ であり、$\overline{jb}=-jb$ です。実数部が無いため、根は A と$\overline{A}$ の 2 つだけです。因数定理を適用しますと、$P(x)=(x-A)(x-\overline{A})P''(x)$ となります。ここで P”(x)は、元の多項式より次数が 2 小さい多項式です。

$(x-A)(x-\overline{A})$ の部分で、A を純虚数 jb としますと、

$$(x-A)(x-\overline{A})=(x-jb)(x+jb)=x^2+b^2$$

になります。この 2 次式は x に x を代入しても、x に－x を代入しても、同じ値になります。

$(x-A)(x-\overline{A})$ で A が純虚数根の場合も、偶関数を表していることになります。

6、伝達関数設計

(1)伝達関数のきまり

伝達関数設計の話に入ります。まず伝達関数に関するきまりを述べます。

「伝達関数の分母の根は複素平面右半面にあってはいけない。」のです。

このことは、「s＝jω とは何か」の章で回路に正弦波を入力した時の出力を、ラプラス逆変換で求めた時のことを思い出して頂けば分ります。出力＝（伝達関数×ラプラス変換の正弦波）をまず行い、その後ラプラス逆変換の為、部分分数分解を行うのでした。**伝達関数の分母が過渡項の分母になります。**

そして伝達関数の分母の根が、ラプラス逆変換後に過渡項の e の肩に乗る乗数を決めるのでした。「s＝jω とは何か」の章の伝達関数分母は、1 次式で表されるものでした。しかし、回路にコイルやコンデンサーが沢山ある場合、伝達関数の分母に s の 2 次以上の多項式が現われます。

そのままでは過渡項のラプラス逆変換が出来ませんので、伝達関数自身も 1 次式の部分分数に直してラプラス逆変換を行うことになります。その場合、因数分解を行います。分母＝0 と置き、この方程式を解き、根を求め、因数分解します。代数学の基本定理により、この方程式は必ず解くことが出来ます。根が複素平面の左半面にあるならば、根の実数部はマイナスとなり、伝達関数分母は、

$$\{s-(-a)\}\{s-(-b+jc)\}\{s-(-b-jc)\}$$

等と因数分解されます。これを使って伝達関数 G(s) を部分分数に直しますと、

$$G(s)=\frac{A}{s-(-a)}+\frac{B}{s-(-b+jc)}+\frac{C}{s-(-b-jc)}$$

になります。出力の時間変化はこの式をラプラス逆変換したものですから、逆変換の公式 $\frac{A}{s-a}\rightarrow Ae^{at}$ により

$$\begin{aligned} g(t) &= Ae^{-at}+Be^{(-b+jc)t}+Ce^{(-b-jc)t} \\ &= Ae^{-at}+Be^{-bt}e^{jct}+Ce^{-b}e^{-jct} \\ &= Ae^{-at}+Be^{-bt}(\cos ct+j\sin ct)+Ce^{-bt}(\cos ct-j\sin ct) \end{aligned}$$

となります。全ての項の e の乗数がマイナスの為、出力に現われる信号は時間の経過とともに小さくなります。これは、過渡項出力が一定時間経過後に消滅することを表しています。

もし根が複素平面の右半面にあるならば、根の実数部はプラスとなります。伝達関数分母は、

$$(s-a)\{s-(b+jc)\}\{s-(b-jc)\}$$

等と因数分解されます。これを使って伝達関数 G(s)を部分分数に直しますと、

$$G(s)=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{s-(b+jc)}+\frac{C}{s-(b-jc)}$$

になります。出力の時間変化はこの式をラプラス逆変換したものですから、

$$\begin{aligned} g(t) &= Ae^{at}+Be^{(b+jc)t}+Ce^{(b-jc)t} \\ &= Ae^{at}+Be^{bt}e^{jct}+Ce^{bt}e^{-jct} \\ &= Ae^{at}+Be^{bt}(\cos ct+j\sin ct)+Ce^{bt}(\cos ct-j\sin ct) \end{aligned}$$

となります。全ての項の e の乗数がプラスの為、出力に現われる信号は時間の経過とともに大きくなります。これは過渡項出力がどんどん大きくなることを表しています。伝達関数分母の根に、複素平面右半面の根がひとつでもあると、回路は不安定になり発振器となります。伝達関数の分母の根は、複素平面右半面にあるといけないのです。

(2)回路の振る舞い

4、で述べましたが、正弦波が加えられた時の s の関数回路の振る舞いを、もう一度述べますと、

①、＋jω が伝達関数の s に代入される。

②、－jω が伝達関数の s に代入される。

③、①の答えと②の答えが、かけ合わされる。

④、③の平方根が出力される。これが周波数伝達関数の絶対値、ω 特である。

となります。

ω 特（ω の関数）から伝達関数（s の関数）へさかのぼる方法は、この回路動作に矛盾しないように組み立てられます。

高次の ω 特はそのままでは回路が実現できません。因数分解を行って、必ず 1 次または 2 次の周波数伝達関数に分解しなくてはなりません。

まず 2 乗した周波数伝達関数の絶対値、2 乗 ω 特を用意します。2 乗 ω 特は普通、分数の形になっています。ローパスフィルターの場合、分母は周波数が上がると大きくなる元関数の 2 乗＋1、分子は零点がない場合は定数、零点がある場合は ω の関数になっています。

元関数については「フィルター近似とは」の章をご覧ください。

(3)2 乗 ω 特分母の因数分解

前述の通り、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗つまり 2 乗 ω 特の分母には、元関数を 2 乗して 1 を足したものを使用します。元関数の具体例は今後の章に続々と出て来ます。世の

中にはいろいろな関数がありますが、正規化したローパスフィルター用元関数の条件をまとめておきます。正規化については「スケーリング」の章をご覧下さい。

①、ω が 1 以下の場合、関数の値がほとんど 0 である。

②、ω が 1 を越えると関数の値の絶対値が非常に大きくなる。

③、奇関数か偶関数である。

④、実数係数である。

奇関数とは f(ω)＝－f(－ω)、偶関数とは f(ω)＝f(－ω)の関数のことです。奇関数とは奇数乗の項のみの多項式、偶関数とは偶数乗の項と定数（無い場合もある）のみの多項式です。

なぜ 1 を足すかは、本章の 7、にあります。

2 乗しているので元関数が奇関数でも偶関数でも、偶関数になります。奇数乗の項のみの多項式である奇関数を 2 乗すれば、全ての項は偶数乗になるからです。1 をたすとグラフの位置が 1 上昇しますが、偶関数のままです。

横軸を ω、縦軸を f(ω)として 2 乗 ω 特分母のグラフを書いた場合、偶関数なので縦軸で左右対称、1 を足しているので横軸から浮いた形になり、上に開いています。

このグラフは横軸、つまり f(ω)＝0 を切る点がありません。f(ω)＝0 と置き方程式とした場合、**実数の根を持ちません。**複素数または純虚数の根を持ちます。

偶関数の場合、f(ω)＝f(－ω)です。つまり、変数のプラスマイナスは関係無く、変数の絶対値が同じなら関数の値は同じになります。

剰余の定理、因数定理および共役根の定理等から次のことが分ります。

実数係数の偶関数の方程式 f(ω)＝0 において、a＋jb が根なら a－jb も根であり、さらに－(a＋jb)＝－a－jb も根であるし、－(a－jb)＝－a＋jb も根です。純虚数の根が出た場合も jc が根なら－jc も根です。つまり根は複素平面上で上下左右対称に配置されます。

1 つの複素数の根が発見されると、すぐに他の 3 つの複素数の根が分り、1 次の因数が 4 つ、または共役根を持つ因数どうしをまとめて、2 次の因数が 2 つ出来ます。そのため、もとの多項式から最高次数が 4 下がった多項式が残ります。また、1 つの純虚数の根が発見されれば、すぐにもう 1 つの純虚数の根が分り、1 次の因数 2 つ、または因数どうしをまとめて 2 次の因数が 1 つ出来ます。その場合は、もとの多項式から最高次数が 2 下がった多項式が残ります。

元関数を 2 乗して 1 を足している実数係数の偶関数多項式を因数分解すると、いくつかの 4 複素数根が出て因数分解が終了するか、いくつかの 4 複素数根とワンセットの 2 純虚数根が出て因数分解が終了するか、ワンセットの 2 純虚数根だけで終了するかのいずれかです。偶関数は最高次数が偶数乗の多項式だからです。以上により、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特分母の元関数 2 乗＋1＝0 方程式は、複素平面上下左右対称の根の集合体であることが分ります。これを s の関数に直す方法を、各々について考えます。

(4) 2 乗 ω 特分母の最高次数が 4 の倍数の時

4 複素数根が複数出て因数分解が終了する場合、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特分母の多項式最高次数が 4 の倍数の時、4 複素数根のワンセットは、たとえば次の様な因数分解の式になります。

$$\{\omega-(a+jb)\}\{\omega-(a-jb)\}\{\omega-(-a+jb)\}\{\omega-(-a-jb)\}$$

まず、この式は偶関数を因数分解したものですから、ω に ω を代入しても－ω を代入しても、かけあわせれば同じ値になります。偶関数である上式が復元されるためには、s の関数である伝達関数にさかのぼった時、s に＋jω が入力されても－jω が入力されても j が消え、全因数に ω または－ω が入力されたのと同じ状態になる必要があります。そのために ω を $\frac{s}{j}$ に置き換えます。

つまり、

$$\left[\frac{s}{j}\right]_{s=j\omega}=\frac{j\omega}{j}=\omega \qquad \left[\frac{s}{j}\right]_{s=-j\omega}=\frac{-j\omega}{j}=-\omega$$

です。実際に置き換えますと、

$$\left[\{\omega-(a+jb)\}\{\omega-(a-jb)\}\{\omega-(-a+jb)\}\{\omega-(-a-jb)\}\right]_{\omega=\frac{s}{j}}$$

$$=\left\{\frac{s}{j}-(a+jb)\right\}\left\{\frac{s}{j}-(a-jb)\right\}\left\{\frac{s}{j}-(-a+jb)\right\}\left\{\frac{s}{j}-(-a-jb)\right\}$$

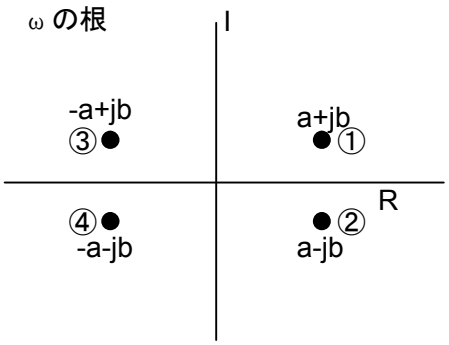
$$=(-js-a-jb)(-js-a+jb)(-js+a-jb)(-js+a+jb)$$

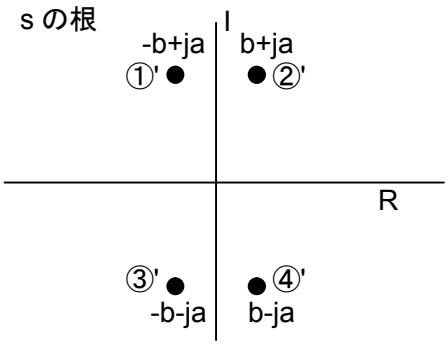
$$=-j(s-ja+b)\bullet-j(s-ja-b)\bullet-j(s+ja+b)\bullet-j(s+ja-b)$$

$$=(-j)^4(s+b-ja)(s-b-ja)(s+b+ja)(s-b+ja)$$

$$=\{s-(-b+ja)\}\{s-(b+ja)\}\{s-(-b-ja)\}\{s-(b-ja)\}$$

になります。ここで各根を複素平面に図示すれば、s の式の根は、ω の式の根を反時計式に 90 度回転した形をしています。ω、－ω の根の j 倍が s＝jω、s＝－jω での根です。





90 度回転した形をしていますが、根は複素平面で上下左右対称なので偶関数です。

ここで因数をまとめます。共役複素数根の因数をまとめます。

複素平面左半面の s の式の共役複素数根、①´③´から出来た因数をかけ合わせますと、

$$(s+b-ja)(s+b+ja)=s^2+2bs+a^2+b^2$$

になります。複素数平面右半面の s の式の共役複素数根、②´④´から出来た因数をかけ合わせますと、

$$(s-b-ja)(s-b+ja)=s^2-2bs+a^2+b^2$$

になります。共役複素数根で出来ていますので、両者とも実数係数の 2 次式になります。この 2 つの式を比べますと、s の 1 次の項の符号が逆です。

両式の s に＋jω を代入した時、両式の演算結果の複素数は共役になります。

両式の s に－jω を代入した時も、両式の演算結果の複素数は共役となります。

複素数に四則演算を行って出来る複素数の共役は、最初の複素数を共役にして同じ四則演算をした結果に等しいのでした。

どちらか片方の式に＋jω および－jω を代入すれば、両方の式の s に＋jω または－jω を代入したときと同じものが出来ます。

回路を発振器にしない為、複素平面左半面にある s の共役複素数根、①´③´から出来た因数だけを伝達関数として使用しますと 6、の(2)回路の振る舞い①②で、s に＋jω および－jω が代入され、③のところでかけ合わされますから、もとの周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特の 4 複素数根部分の因数がすべて復元されるはずです。

実際に計算を行ってみます。$s^2+2bs+a^2+b^2$ の s に、＋jω を代入しますと、

$$(j\omega)^2+j2b\omega+a^2+b^2=a^2+b^2-\omega^2+j2b\omega$$

になり、同じく $s^2+2bs+a^2+b^2$ の s に－jω を代入しますと、

$$(-j\omega)^2-j2b\omega+a^2+b^2=a^2+b^2-\omega^2-j2b\omega$$

になります。両者をかけ合わせますと、

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2-\omega^2+j2b\omega)(a^2+b^2-\omega^2-j2b\omega)\\&=(a^2+b^2-\omega^2)^2+(2b\omega)^2\\&=\omega^4-2a^2\omega^2-2b^2\omega^2+a^4+2a^2b^2+b^4+4b^2\omega^2\end{aligned}$$

$$= \omega^4 - 2a^2\omega^2 + 2b^2\omega^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4$$

になります。一方、もとの 2 乗 ω 特分母の因数を全てかけ合わせますと、

$$\begin{aligned}
&\{\omega - (a + jb)\}\{\omega - (a - jb)\}\{\omega - (-a + jb)\}\{\omega - (-a - jb)\} \\
&= (\omega - a - jb)(\omega - a + jb)(\omega + a - jb)(\omega + a + jb) \\
&= (\omega^2 - 2a\omega + a^2 + b^2)(\omega^2 + 2a\omega + a^2 + b^2) \\
&= \omega^4 - 2a^2\omega^2 + 2b^2\omega^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4
\end{aligned}$$

になり答えは一致します。偶関数ですから ω を－ω にしても一致します。

複素平面左半面の s の共役複素数根、①′③′から出来た s の式に、正弦波入力時の回路の振る舞いが作用することにより、もとの 2 乗 ω 特分母の 4 複素数根部分の式が復元出来ます。

(5) 2 乗 ω 特分母最高次数が 4 の倍数では無い時

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特分母の最高次数が 14 次 10 次 6 次 2 次等の場合､因数分解において 4 複素数根がいくつか出たあと､2 純虚数根が出て終了するか、2 純虚数根だけで終了することになります。その 2 純虚数根部分について考えます。

2 純虚数根を、例えば±jc とすれば、次のように因数分解されます。

$$\{\omega - (+jc)\}\{\omega - (-jc)\} = (\omega - jc)(\omega + jc)$$

この式は 5、の(2)⑤で書いたように、偶関数を偶関数で因数分解して残ったものですから、やはり偶関数です。ω に ω を代入しても、－ω を代入しても、かけあわせれば同じ値になり、

$$\begin{aligned}
&(\omega - jc)(\omega + jc) = \omega^2 + c^2 \\
&(-\omega - jc)(-\omega + jc) = \omega^2 + c^2
\end{aligned}$$

となります。どちらも左辺で共役複素数どうしをかけることにより、右辺で絶対値の 2 乗を作る様になっています。右辺と同じものを、s＝jω と s＝－jω を使って作れば良いです。

ω の関数から s の関数にさかのぼった時、式の s に、jω と－jω が代入され、かけ合わせた時、$\omega^2 + c^2$ が出来れば良いです。そのような式は s＋c、

$$[s + c]_{s=j\omega} \bullet [s + c]_{s=-j\omega} = (j\omega + c)(-j\omega + c) = \omega^2 + j\omega c - j\omega c + c^2 = \omega^2 + c^2$$

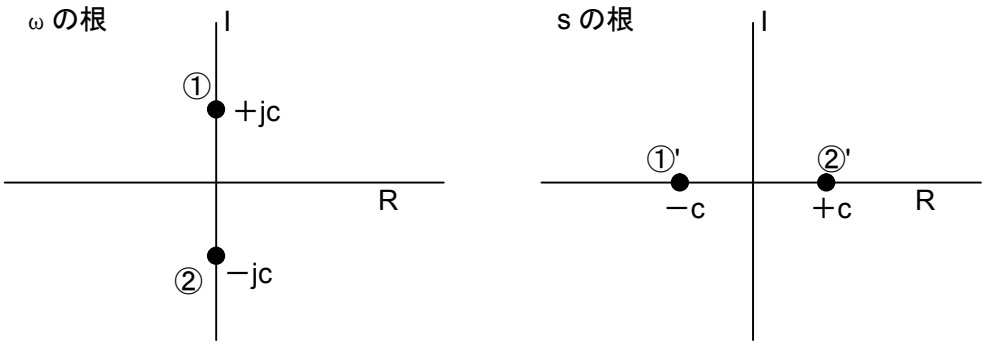
または s－c、

$$[s-c]_{s=j\omega} \bullet [s-c]_{s=-j\omega} = (j\omega - c)(-j\omega - c) = \omega^2 - j\omega c + j\omega c + c^2 = \omega^2 + c^2$$

が考えられます。

ω の時は、c が虚数部になる共役複素数どうしのかけ算で ω^2+c^2 を作りましたが、s の時は ω が虚数部になる共役複素数どうしの積となり、ω^2+c^2 が成り立ちます。

ここで、それぞれの根を複素平面に図示すれば、s の式の根は ω の式の根を反時計式に 90 度回転した形をしています。4 複素数根の時と同じです。



回路の安定化の為、s の式の根は複素平面の左半面になくてはなりません。したがって、①'の根－c の方を採用します。

複素平面左半面の s の根①'から出来た因数、{s－(－c)}＝s＋c に、正弦波入力時の回路の振る舞いが作用することにより、もとの 2 乗 ω 特分母の 2 純虚数根部分の式、ω^2+c^2 が復元出来ます。

(6)　分子の因数分解

分子も偶関数なので、分母と同じように因数分解され、s の関数に直るはずです。

(7) 伝達関数設計のまとめ

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特分子分母を因数分解し、求めた根を 90 度反時計式に回転し s の根とします。

s の根のうち複素平面左半面の根だけを取り出し、因数を作り伝達関数の分子分母とします。

複素数の四則演算の公式に、$\overline{\left(\frac{X \cdot Y}{A \cdot B \cdot C}\right)} = \frac{\overline{X} \cdot \overline{Y}}{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$ がありました。

複素数の分数 ABC 分の XY の共役は、A の共役 B の共役 C の共役分の X の共役 Y の共

役に等しいのでした。

複素平面左半面の根由来の s の分数に－jω を代入したとき、採用出来ない右半面の根由来の分数に＋jω を代入したものと同じものが出来、左半面の根由来の因数の分数に＋jω を代入したものとがかけ合わされ、全部の因数の s に＋jω または－jω を代入したものと同じものが出来ます。

ここで＋jω または－jω を代入したものと同じものが出来ると書くのは、偶関数であることを強調したいからです。

＋jω または－jω の j が消えるようにするため、途中で $\omega = \frac{s}{j}$ を行っているので、もとの 2 乗 ω 特に＋ω または－ω を代入したものと同じになり、2 乗 ω 特が復元されます。

出力はこの平方根になります。

なお、伝達関数の安定性の説明を良く理解して頂ければ分かるように、回路の安定性と G(s)の分子は全く関係ないことから、分子については左半面だけと言う規則はありません。

具体的には分母の因数分解、

$$(s+b+ja)(s+b-ja)(s-b+ja)(s-b-ja)\bullet\bullet\bullet\bullet(s+c)(s-c)$$

の中から、

$$(s+b+ja)(s+b-ja)\bullet\bullet\bullet\bullet(s+c)$$

を取り出し伝達関数の分母とします。

現実の回路において、伝達関数に虚数の係数があると回路が実現出来ないので、共役複素数根の因数はまとめて、2 次の因数にします。

角周波数 0 での利得を 1 にする為、分子に分母の定数項と同じものをのせれば、伝達関数は次のようになります。

$$G(s) = \frac{c}{s+c}\bullet\frac{a^2+b^2}{s^2+2bs+a^2+b^2}\bullet\bullet\bullet\bullet$$

(8) 伝達関数設計の別方法

周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特の式 f(ω)の ω を $\frac{s}{j}$ に置き換え、s の関数に直してから因数分解する方法です。

$f(\frac{s}{j})$ の s に＋jω を代入した時、$f(\frac{j\omega}{j}) = f(\omega)$ に戻るはずです。

f(ω)として復元したい 2 乗 ω 特の式、つまり元関数の 2 乗＋1 式は偶関数です。偶関数は定数項と偶数乗の変数の多項式です。

偶数乗の変数なので ω を $\frac{s}{j}$ ではなく、$\frac{s}{-j}$ で置き換え、s の関数に直してから因数分解し

ても同じです。$\frac{s}{j}$ と $\frac{s}{-j}$ は、偶数乗すれば同じ値になります。

分母の j は、偶数乗したときに実数化します。2、6、10、・・・乗の場合は－1 となり、4、8、12、・・・乗のときは＋1 です。

例えば、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗を、

$$f(\omega) = a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

とすれば、

$$f(\frac{s}{j}) = a_0 + a_1(\frac{s}{j})^2 + a_2(\frac{s}{j})^4 + a_3(\frac{s}{j})^6 + a_4(\frac{s}{j})^8 \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$= a_0 - a_1s^2 + a_2s^4 - a_3s^6 + a_4s^8 \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

です。係数の正負は変わりますが、偶数乗の項と定数項しか無いことには変わりないので、$f(\omega)$ が偶関数なら、$\omega = \frac{s}{j}$ を行った $f(\frac{s}{j})$ も偶関数になります。この偶関数多項式の s に $j\omega$ を代入して見ますと、

$$\left[a_0 - a_1s^2 + a_2s^4 - a_3s^6 + a_4s^8 \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\right]_{s=j\omega}$$

$$= a_0 - a_1(j\omega)^2 + a_2(j\omega)^4 - a_3(j\omega)^6 + a_4(j\omega)^8 \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

$$= a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega^4 + a_3\omega^6 + a_4\omega^8 \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$$

になり、元に戻ります。s に代入した $j\omega$ の乗数による符号の変化は、その前に行った $f(\frac{s}{j})$ の分母 j の乗数による符号の変化と打ち消し合い、周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特＝元関数 2 乗＋1 式が復元されます。

多項式のままでは回路が作れませんので、実現可能な伝達関数にする為、$f(\frac{s}{j})$ 式を因数分解します。

すでに s の偶関数になっていますので、$f(\frac{s}{j}) = 0$ の根はいくつかの 4 複素数根、またはいくつかの 4 複素数根と 2 実根になります。因数分解終了後、複素平面左の根のみを取り出し、そのまま s の伝達関数の因数とします。

取り出した左半面の根による因数だけで、2 乗 ω 特の式 $f(\omega)$が復元される様子は 6、の(4)

(5)と全く同じです。

因数分解すべき多項式の乗数に奇数がありますと、$\omega = \frac{s}{j}$ を行った時、j が残るので複素平面で上下左右対称に因数分解できなくなりますし、実数係数にはなりません。

このことも、最初に用意する周波数伝達関数の絶対値の 2 乗が、偶関数でなければならない理由です。

7、1 を足す理由

因数分解前に元関数の 2 乗に 1 を足す理由は次の通りです。

低域通過フィルターの場合、角周波数 0 で出力は筒抜けにならなければなりません。つまり利得が 1 です。そのために分母の元関数の 2 乗の後に＋1 がくっ付いています。

大体の元関数の 2 乗値は、ω＝0 で 0 になっています。フィルターの利得は ω＝0 で 1 からスタートしなくてはならないので 1 を足します。元関数の 2 乗値が ω＝0 で 0 にならない場合は、それに合わせた数を足して ω＝0 での利得を 1 付近に調整します。

元関数に 1 をたしてから 2 乗しても良いと思いますが、複素平面で左右対称に因数分解できなくなる場合があります。

例えば奇関数 ω^3 の場合を考えますと、

$$
\begin{aligned}
(\omega^3+1)^2 &= (\omega^3+1)(\omega^3+1) \\
&= \omega^6 + 2\omega^3 + 1
\end{aligned}
$$

です。ω を $\frac{s}{j}$ と置く方法で計算しますと、

$$
\begin{aligned}
(\tfrac{s}{j})^6 + 2(\tfrac{s}{j})^3 + 1 &= \frac{s^6}{j^6} + 2\frac{s^3}{j^3} + 1 \\
&= \frac{s^6}{-1} + 2\frac{s^3}{-j} + 1 \\
&= -s^6 + j2s^3 + 1
\end{aligned}
$$

となり、これは実数係数でも、偶関数でもないので複素平面で上下左右対称に因数分解出来なくなります。

偶関数は偶数乗の項と定数項しかないので、2 乗しても偶関数です。偶関数に 1 をたしてから 2 乗しても、偶数乗の項と定数項しかないので偶関数です。

奇関数は奇数乗の項しかないので、2 乗するとすべての項が偶数乗に変わり、偶関数に変身します。ところが、奇関数に 1 をたしてから 2 乗すると項の中に奇数乗の項が残ってしまうため偶関数になりません。偶関数も奇関数に合わせて、2 乗してから 1 を足しています。

8、章のまとめ

伝達関数を作るには、先に周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特を作ります。

2 乗 ω 特の分母には、元関数を 2 乗して 1 を足したものを使用します。

分子分母を因数分解し、求めた根を 90 度反時計式に回転し、s の根とします。

s の根のうち複素平面左半面の根だけを取り出し、因数を作り、伝達関数 G(s)の分母とします。分子も根の半分だけ取り出し、因数を作り、伝達関数 G(s)の分子とします。

正弦波 $V_m \sin\omega t$ を入力することにより、この伝達関数の s に＋jω と－jω が代入され、大きさは,

$$V_m \bullet \sqrt{G(+j\omega)G(-j\omega)}$$

になり、位相は、

$$\tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}\quad G(+j\omega)}{\mathrm{Re}\quad G(+j\omega)}$$

になって出力されます。

s に＋jω と－jω を代入した共役複素数の掛け算が周波数伝達関数の絶対値の 2 乗、つまり 2 乗 ω 特になるように作ったのですから、周波数伝達関数の絶対値には平方根が付きます。周波数伝達関数は複素数の絶対値になりますので、必ず平方根が付きます。

目次へ戻る