テータ関数表算出計算の詳細　　2008 年 5 月 13 日　目次へ戻る

関数＼変数	$-v$	$v+\frac{1}{2}$	$v+1$	$v+2$	$v+\frac{\tau}{2}$	$v+\tau$	$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$v+1+\tau$
ϑ_0	ϑ_0	ϑ_3	ϑ_0	ϑ_0	$j\lambda\vartheta_1$	$-\mu\vartheta_0$	$\lambda\vartheta_2$	$-\mu\vartheta_0$
ϑ_1	$-\vartheta_1$	ϑ_2	$-\vartheta_1$	ϑ_1	$j\lambda\vartheta_0$	$-\mu\vartheta_1$	$\lambda\vartheta_3$	$\mu\vartheta_1$
ϑ_2	ϑ_2	$-\vartheta_1$	$-\vartheta_2$	ϑ_2	$\lambda\vartheta_3$	$\mu\vartheta_2$	$-j\lambda\vartheta_0$	$-\mu\vartheta_2$
ϑ_3	ϑ_3	ϑ_0	ϑ_3	ϑ_3	$\lambda\vartheta_2$	$\mu\vartheta_3$	$j\lambda\vartheta_1$	$\mu\vartheta_3$
計算	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
ﾍﾟｰｼﾞ	1	2	4	5	6	11	16	22

$$\lambda = q^{-\frac{1}{4}}z^{-1} = (e^{j\pi\tau})^{-\frac{1}{4}}(e^{j\pi v})^{-1} = e^{-\frac{j\pi\tau}{4}}e^{-j\pi v} = e^{-j\pi v-\frac{j\pi\tau}{4}} = e^{-j\pi(v+\frac{\tau}{4})}$$

$$\mu = q^{-1}z^{-2} = (e^{j\pi\tau})^{-1}(e^{j\pi v})^{-2} = e^{-j\pi\tau}e^{-2j\pi v} = e^{-2j\pi v-j\pi\tau} = e^{-j\pi(2v+\tau)}$$

各テータ関数の無限級数による定義は、以下の通りです。

$$\vartheta_0(v) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

$$\vartheta_1(v) = -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1}-z^{-(2n+1)}\}$$

$$\vartheta_2(v) = \sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1}+z^{-(2n+1)}\}$$

$$\vartheta_3(v) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

表中の計算(1)～(8)は、以下の通りです。

(1) v を−v にして $z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z = e^{j\pi(-v)} = e^{-j\pi v} = (e^{j\pi v})^{-1} = z^{-1}$ となり、z は z^{-1} に変化しますので、

$$\vartheta_0(-v) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(z^{-1})^{2n}+(z^{-1})^{-2n}\}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{-2n}+z^{2n})$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) = \vartheta_0(v)$$

$$\vartheta_1(-v) = -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(z^{-1})^{2n+1} - (z^{-1})^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{-(2n+1)} - z^{2n+1}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}(-1)\{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\}$$

$$= j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_2(-v) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(z^{-1})^{2n+1} + (z^{-1})^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{-(2n+1)} + z^{2n+1}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = \vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_3(-v) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\{(z^{-1})^{2n} + (z^{-1})^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{-2n} + z^{2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_3(v)$$

となります。

(2) v を $v + \frac{1}{2}$ にすることは、u を u+K にすることに等しいです。、

$$\because \frac{u+K}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{1}{2} = v + \frac{1}{2}$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z = e^{j\pi(v+\frac{1}{2})} = e^{j\pi v + \frac{j\pi}{2}} = e^{j\pi v}e^{j\frac{\pi}{2}} = z(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = jz$ となり、z は jz に変化しますので、

$$\vartheta_0(v+\frac{1}{2}) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(jz)^{2n}+(jz)^{-2n}\}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(j^{2n}z^{2n}+j^{-2n}z^{-2n})$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(-1)^n z^{2n}+(\frac{1}{-1})^n z^{-2n}\}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(-1)^n(z^{2n}+z^{-2n})$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n} q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) = \vartheta_3(v)$$

$$\vartheta_1(v+\frac{1}{2}) = -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(jz)^{2n+1}-(jz)^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{j^{2n+1}z^{2n+1}-j^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$j^{2n+1} = (j^2)^n j = (-1)^n j$、$j^{-(2n+1)} = j^{-2n-1} = (j^{-2})^n j^{-1} = (\frac{1}{j^2})^n \frac{1}{j} = (-1)^n \frac{1}{j} = -(-1)^n j$ ですので、

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\ [(-1)^n j\, z^{2n+1}-\{-(-1)^n j\, z^{-(2n+1)}\}]$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}(-1)^n\ j\ [z^{2n+1}-\{-z^{-(2n+1)}\}]$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\ j\ [z^{2n+1}-\{-z^{-(2n+1)}\}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1}+z^{-(2n+1)}\} = \vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_2(v+\frac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(jz)^{2n+1}+(jz)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{j^{2n+1} z^{2n+1} + j^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1)^n j \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\}$$

$$= j \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1)^n \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_3(v+\frac{1}{2}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(jz)^{2n} + (jz)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} (j^{2n} z^{2n} + j^{-2n} z^{-2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} \{(-1)^n z^{2n} - (-1)^n z^{-2n})\}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} (-1)^n (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_0(v)$$

となります。

(3) v を $v+1$ にするとは、u を u＋2K にすることに等しいです。

$$\because \frac{u+2K}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{2K}{2K} = v+1$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z = e^{j\pi(v+1)} = e^{j\pi v + j\pi} = e^{j\pi v} e^{j\pi} = z(\cos\pi + j\sin\pi) = -z$ となり、z は－z に変化しますので、

$$\vartheta_0(v+1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-z)^{2n} + (-z)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} [\{(-z)^2\}^n + \{(-z)^{-2}\}^n]$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n}) = \vartheta_0(v)$$

$$\vartheta_1(v+1) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-z)^{2n+1} - (-z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^{2n+1} z^{2n+1} - (-1)^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-1)z^{2n+1}-(-1)z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}(-1)\{z^{2n+1}-z^{-(2n+1)}\}$$

$$= j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1}-z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_2(v+1) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-z)^{2n+1}+(-z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-1)^{2n+1}z^{2n+1}+(-1)^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-1)z^{2n+1}+(-1)z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}(-1)\{z^{2n+1}+z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1}+z^{-(2n+1)}\} = -\vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_3(v+1) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\{(-z)^{2n}+(-z)^{-2n}\}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}((-1)^{2n}z^{2n}+(-1)^{-2n}z^{-2n})$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n}) = \vartheta_3(v)$$

となります。

(4) v を $v+2$ にするとは、u を u+4K にすることに等しいです。

$$\because \frac{u+4K}{2K} = \frac{u}{2K}+\frac{4K}{2K} = v+2$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z = e^{j\pi(v+2)} = e^{j\pi v+j2\pi} = e^{j\pi v}e^{j2\pi} = z(\cos 2\pi + j\sin 2\pi) = z$

となり、z は z に戻りますので、

$$\vartheta_0(v+2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})$$
$$= \vartheta_0(v)$$

$$\vartheta_1(v+2) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_2(v+2) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_3(v+2) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})$$
$$= \vartheta_3(v)$$

となります。

(5) v を $v + \frac{\tau}{2}$ にするとは、u を u+jK'にすることに等しいです。

$$\because \frac{u + jK'}{2K} = \frac{u}{2K} + j\frac{K'}{2K} = v + \frac{\tau}{2}$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z = e^{j\pi(v+\frac{\tau}{2})} = e^{j\pi v + j\pi\frac{\tau}{2}} = e^{j\pi v} e^{j\pi\tau\frac{1}{2}} = q^{\frac{1}{2}} z$ となり、z は $q^{\frac{1}{2}} z$ に変化しますので、

$$\vartheta_0(v + \frac{\tau}{2}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(q^{\frac{1}{2}} z)^{2n} + (q^{\frac{1}{2}} z)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n})$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{-n} z^{-2n}$$
$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-n} z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

上式第２項のｎに０を代入すると第２項は１になり、第１項が省略出来、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}} z^{-2n}$$

上式第２項のｎも０からにする為、適宜変形し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}} z^{-2(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1) q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{-2n-2}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} - q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{2n} z - q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{-2n-2} z$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{-2n-2+1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} (z^{2n+1} - z^{-2n-1})$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = j\lambda\vartheta_1(v)$$

$\lambda = q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} = (e^{j\pi\tau})^{-\frac{1}{4}} (e^{j\pi v})^{-1} = e^{-\frac{j\pi\tau}{4}} e^{-j\pi v} = e^{-j\pi v - \frac{j\pi\tau}{4}} = e^{-j\pi(v+\frac{\tau}{4})}$ です。

$$\vartheta_1(v+\frac{\tau}{2}) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(q^{\frac{1}{2}} z)^{2n+1} - (q^{\frac{1}{2}} z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(q^{n+\frac{1}{2}}z^{2n+1} - q^{-(n+\frac{1}{2})}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{n+\frac{1}{2}}z^{2n+1} + j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-(n+\frac{1}{2})}z^{-(2n+1)}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+2n+\frac{3}{4}}z^{2n+1} + j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-\frac{1}{4}}z^{-(2n+1)}$$

第 1 項の q の指数について平方完成しますと、

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2-\frac{1}{4}}z^{2n+1} + j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-\frac{1}{4}}z^{-(2n+1)}$$

$q^{-\frac{1}{4}}$ は n に無関係なので外に出し、

$$= -jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2}z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-(2n+1)}$$

$$= -jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2}z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}z^{-1}$$

$$= -jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2}z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

第 2 項の Σ 内は n＝0 の時 1 になりますから外に出し、n＝1 からに変更し、

$$= jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2}z^{2n+1} + jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

新しい第 2 項も n＝1 からに変更し、

$$= jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} q^{(n-1+1)^2}z^{2(n-1)+1} + jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

$$= jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^{-1} q^{n^2}z^{2n-1} + jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

$$= jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)q^{n^2}z^{2n}z^{-1} + jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

$$= jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1} + jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{2n} + jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

$$= jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}\}$$

$$= jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n} + z^{-2n})\} = j\lambda\vartheta_0(v)$$

$$\vartheta_2(v + \frac{\tau}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(q^{\frac{1}{2}}z)^{2n+1} + (q^{\frac{1}{2}}z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(q^{n+\frac{1}{2}}z^{2n+1} + q^{-(n+\frac{1}{2})}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{n+\frac{1}{2}}z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{-(n+\frac{1}{2})}z^{-(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n+\frac{3}{4}}z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-\frac{1}{4}}z^{-(2n+1)}$$

第 1 項の q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2-\frac{1}{4}}z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-\frac{1}{4}}z^{-(2n+1)}$$

$q^{-\frac{1}{4}}$ は n に無関係ですので外に出し、

$$= q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}z^{-(2n+1)}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}z^{-2n}z^{-1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

第 2 項の Σ 内は n＝0 の時 1 になりますから外に出し、n＝1 からに変更し、

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

上式の第 2 項も n＝1 からに変更し、

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1+1)^2} z^{2(n-1)+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}\}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})\} = \lambda \vartheta_3(v)$$

$$\vartheta_3(v + \frac{\tau}{2}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \{(q^{\frac{1}{2}} z)^{2n} + (q^{\frac{1}{2}} z)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-n} z^{-2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2+n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-n} z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

上式第 2 項の n も 0 からにする為、適宜変形し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{-2n-2}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{2n} z + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{-2n-2} z$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{-2n-2+1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (z^{2n+1} + z^{-2n-1})$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = \lambda \vartheta_2(v)$$

となります。

(6) v を v＋τにすることは、u を u＋j2K'にすることに等しいです。

$$\because \frac{u+j2K'}{2K}=\frac{u}{2K}+j\frac{2K'}{2K}=\frac{u}{2K}+j\frac{K'}{K}=v+\tau$$

$z=e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z=e^{j\pi(v+\tau)}=e^{j\pi v+j\pi\tau}=e^{j\pi v}e^{j\pi\tau}=qz$ となり、z は qz に変化しますので、

$$\vartheta_0(v+\tau)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\{(qz)^{2n}+(qz)^{-2n}\}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(q^{2n}z^{2n}+q^{-2n}z^{-2n})$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^{2n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^{-2n}z^{-2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+2n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-2n}z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+2n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-2n}z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2-1}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1)^2-1}z^{-2n}$$

$$=q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2}z^2z^{-2}z^{2n}+q^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1)^2}z^2z^{-2}z^{-2n}$$

$$=q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2}z^{2n+2}+q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1)^2}z^{-2n+2}$$

$$=q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} q^{(n+1-1)^2}z^{2(n-1)+2}+q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1)^2}z^{-2n+2}$$

$$=-q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{2n}+q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-1)^2}z^{-2n+2}$$

$$=-q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{2n}+q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n-1+1)^2}z^{-2(n+1)+2}$$

$$=-q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{2n}-q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

第 2 項の n＝0 の場合を外に出し、

$$=-q^{-1}z^{-2}-q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{2n}-q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}$$

$$=-q^{-1}z^{-2}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}z^{-2n}\}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})\} = -\mu\vartheta_0(v)$$

$\mu = q^{-1}z^{-2} = (e^{j\pi\tau})^{-1}(e^{j\pi v})^{-2} = e^{-j\pi\tau}e^{-2j\pi v} = e^{-2j\pi v - j\pi\tau} = e^{-j\pi(2v+\tau)}$ です。

$$\vartheta_1(v+\tau) = -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(qz)^{2n+1}-(qz)^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{q^{2n+1}z^{2n+1}-q^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{2n+1}z^{2n+1} + j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{-2n-1}z^{-2n-1}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+3n+\frac{5}{4}}z^{2n+1} + j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-n-\frac{3}{4}}z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2-1}z^{2n+1} + j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-1}z^{-2n-1}$$

$$= -jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2}z^{2n+1} + jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2}z^{-2n-1}$$

$$= -jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2}z^2z^{-2}z^{2n+1} + jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2}z^2z^{-2}z^{-2n-1}$$

$$= -jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2}z^{2n+3} + jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2}z^{-2n+1}$$

第 1 項を n＝1 から、第 2 項を n＝－1 からに変更しますと、

$$= -jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{(n-1+\frac{3}{2})^2}z^{2(n-1)+3} + jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}q^{(n+1-\frac{1}{2})^2}z^{-2(n+1)+1}$$

$$= -jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^{-1}q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{2n-2+3} + jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(-1)q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{-2n-2+1}$$

$$= jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

第 2 項での n＝－1 の場合は、第 1 項での n＝0 の場合と同じなので、

$$= jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= jq^{-1}z^{-2}\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}\}$$

$$= jq^{-1}z^{-2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\}] = -\mu\vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_2(v+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(qz)^{2n+1} + (qz)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(q^{2n+1}z^{2n+1} + q^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{2n+1}z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-2n-1}z^{-2n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+3n+\frac{5}{4}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-n-\frac{3}{4}} z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2-1} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2-1} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{2n+1} + q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+3} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n+1}$$

第 1 項を n＝1 から、第 2 項を n＝－1 からに変更しますと、

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1+\frac{3}{2})^2} z^{2(n-1)+3} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=-1}^{\infty} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2} z^{-2(n+1)+1}$$

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=-1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

第 2 項の n＝－1 の場合は、第 1 項の n＝0 の場合と同じなので、

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-1}z^{-2}\{\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}\}$$

$$= q^{-1}z^{-2}[\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\}] = \mu\vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_3(v+\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\{(qz)^{2n} + (qz)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(q^{2n}z^{2n} + q^{-2n}z^{-2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}q^{2n}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}q^{-2n}z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}q^{2n}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}q^{-2n}z^{-2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-2n}z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2-1}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2-1}z^{-2n}$$

$$= q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n} + q^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2} z^{-2} z^{2n} + q^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^{2} z^{-2} z^{-2n}$$

$$= q^{-1} z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2} z^{-2n+2}$$

$$= q^{-1} z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-1+1)^2} z^{-2(n+1)+2}$$

$$= q^{-1} z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

第 2 項の n＝0 の場合を外に出し、

$$= q^{-1} z^{-2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-1} z^{-2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-1} z^{-2} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + q^{-1} z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-1} z^{-2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n})$$

$$= q^{-1} z^{-2}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})\} = \mu\vartheta_3(v)$$

となります。

(7) v を $v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ にするとは、u を u＋K＋jK'にすることに等しいです。

$$\because \frac{u + K + jK'}{2K} = \frac{u}{2K} + \frac{K}{2K} + j\frac{K'}{2K} = v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z = e^{j\pi(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2})} = e^{j\pi v} e^{\frac{j\pi}{2}} e^{j\pi\tau} = j q^{\frac{1}{2}} z$ となり、z は $j q^{\frac{1}{2}} z$ に変化しますので、

$$\vartheta_0(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(j q^{\frac{1}{2}} z)^{2n} + (j q^{\frac{1}{2}} z)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-1)^n q^n z^{2n} + (\frac{1}{-1})^n q^{-n} z^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-1)^n q^n z^{2n} + (-1)^n q^{-n} z^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 1^n q^{n^2} (q^n z^{2n} + q^{-n} z^{-2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^n z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} q^{-n} z^{-2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2+n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-n} z^{-2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2(n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{4}} z^{-2n-2}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-2}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{2n} z + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \frac{1}{z} z^{-2n-2} z$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-1} z^{-2n-2+1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (z^{2n+1} + z^{-2n-1})$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\} = \lambda \vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_1(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) = -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(jq^{\frac{1}{2}}z)^{2n+1} - (jq^{\frac{1}{2}}z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{j^{2n+1} q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - j^{-(2n+1)} q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$j^{2n+1} = (j^2)^n j = (-1)^n j$、$j^{-(2n+1)} = j^{-2n-1} = (j^{-2})^n j^{-1} = (\frac{1}{j^2})^n \frac{1}{j} = (-1)^n \frac{1}{j} = -(-1)^n j$ ですので、

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^n j\, q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + (-1)^n j\, q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1}\}$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} (-1)^n j\, (q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1})$$

$$= -j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} q^{(n+\frac{1}{2})^2} j\, (q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} (q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{n+\frac{1}{2}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-n-\frac{1}{2}} z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2 - \frac{1}{4}} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2 - \frac{1}{4}} z^{-2n-1}$$

$q^{-\frac{1}{4}}$ は n に無関係なので外に出し、

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

第 2 項の Σ 内は n＝0 の時 1 になりますから外に出し、

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2} z^{2n+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{-2n}$$

上式第 2 項も n＝1 からに変更しますと

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^{2n} + q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} (z^{2n} + z^{-2n})\} = \lambda \vartheta_3(v)$$

$$\vartheta_2(v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(jq^{\frac{1}{2}} z)^{2n+1} + (jq^{\frac{1}{2}} z)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{j^{2n+1} q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} + j^{-(2n+1)} q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$j^{2n+1} = (j^2)^n j = (-1)^n j$、$j^{-(2n+1)} = j^{-2n-1} = (j^{-2})^n j^{-1} = (\frac{1}{j^2})^n \frac{1}{j} = (-1)^n \frac{1}{j} = -(-1)^n j$ ですので、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^n j\, q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - (-1)^n j\, q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{\frac{1}{2}(2n+1)} z^{2n+1} - j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-\frac{1}{2}(2n+1)} z^{-(2n+1)}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2 - \frac{1}{4}} z^{2n+1} - j \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2 - \frac{1}{4}} z^{-(2n+1)}$$

$$= jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} - jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n-1}$$

$$= jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} - jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

第 2 項の n＝0 の時を外に出し、

$$= -jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+1} - jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

上式第 2 項も n＝1 からに変更しますと

$$= -jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{(n+1-1)^2} z^{2(n-1)+1} - jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= -jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} + jq^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (-1)^{-1} q^{n^2} z^{2n-1} - jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= -jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} - jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} - jq^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}$$

$$= -jq^{\frac{1}{4}} z^{-1} \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} z^{-2n}\}$$

$$= -jq^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(z^{2n}+z^{-2n})\} = -j\lambda\vartheta_0(v)$$

$$\vartheta_3(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\{(jq^{\frac{1}{2}}z)^{2n}+(jq^{\frac{1}{2}}z)^{-2n}\}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(j^{2n}q^n z^{2n}+j^{-2n}q^{-n}z^{-2n})$$

$j^{2n} = (j^2)^n = (-1)^n$、$j^{-2n} = (j^{-2})^n = (\frac{1}{j^2})^n = (\frac{1}{-1})^n = (-1)^n$ ですので、

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(q^n z^{2n}+q^{-n}z^{-2n})$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^n z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^{-n}z^{-2n}$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+n}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-n}z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{2n}+q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2}z^{-2n}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{2n}+q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2}z^{-2(n+1)}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}zz^{2n}\frac{1}{z}-q^{-\frac{1}{4}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}zz^{-2n-2}\frac{1}{z}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{2n+1}-q^{-\frac{1}{4}}z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}z^{-2n-2+1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= q^{-\frac{1}{4}} z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\} = j\lambda\vartheta_1(v)$$

となります。

(8) v を $v+1+\tau$ にするとは、u を u＋2K＋j2K'にすることに等しいです。

$$\because \frac{u+2K+j2K'}{2K} = v+1+\tau$$

$z = e^{j\pi v}$ に代入しますと、$z = e^{j\pi(v+1+\tau)} = e^{j\pi v} e^{j\pi} e^{j\pi\tau} = -qz$ となり、z は－qz に変化するので、

$$\vartheta_0(v+1+\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-qz)^{2n} + (-qz)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{(-1)^{2n} q^{2n} z^{2n} + (-1)^{-2n} q^{-2n} z^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \{q^{2n} z^{2n} + (\frac{1}{-1})^{2n} q^{-2n} z^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} (q^{2n} z^{2n} + q^{-2n} z^{-2n})$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} q^{-2n} z^{-2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-2n} z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{n^2+2n} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2-2n} z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2-1} z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2-1} z^{-2n}$$

$$= q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^2 z^{-2} z^{2n} + q^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^2 z^{-2} z^{-2n}$$

$$= q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+1)^2} z^{2n+2} + q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1)^2} z^{-2n+2}$$

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{(n+1-1)^2}z^{2(n-1)+2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n-1)^2}z^{-2n+2}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{2n} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n-1)^2}z^{-2n+2}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{2n} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}q^{(n-1+1)^2}z^{-2(n+1)+2}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{2n} - q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{-2n}$$

第 2 項の n＝0 の場合を外に出して、

$$= -q^{-1}z^{-2} - q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{2n} - q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{-2n}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}z^{-2n}\}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}(z^{2n} + z^{-2n})\} = -\mu\vartheta_0(v)$$

$\mu = q^{-1}z^{-2} = (e^{j\pi\tau})^{-1}(e^{j\pi v})^{-2} = e^{-j\pi\tau}e^{-2j\pi v} = e^{-2j\pi v - j\pi\tau} = e^{-j\pi(2v+\tau)}$ です。

$$\vartheta_1(v+1+\tau) = -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-qz)^{2n+1} - (-qz)^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-1)^{2n+1}q^{2n+1}z^{2n+1} - (-1)^{-(2n+1)}q^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-1)^{2n}(-1)q^{2n+1}z^{2n+1} - (-1)^{-2n}(-1)^{-1}q^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-1)^{2n}(-1)q^{2n+1}z^{2n+1} - (\frac{1}{-1})^{2n}(\frac{1}{-1})q^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{-q^{2n+1}z^{2n+1} + q^{-(2n+1)}z^{-(2n+1)}\}$$

$$= j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{2n+1}z^{2n+1} - j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{(n+\frac{1}{2})^2}q^{-2n-1}z^{-2n-1}$$

$$= j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2+3n+\frac{5}{4}} z^{2n+1} - j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n^2-n-\frac{3}{4}} z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2-1} z^{2n+1} - j\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2-1} z^{-2n-1}$$

$$= jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+1} - jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{2n+1} - jq^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{-2n-1}$$

$$= jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+3} - jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n+1}$$

第 1 項を n＝1 から、第 2 項を n＝－1 からに変更しますと、

$$= jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} q^{(n-1+\frac{3}{2})^2} z^{2(n-1)+3} - jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2} z^{-2(n+1)+1}$$

$$= -jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

第 2 項の n＝－1 の場合は、第 1 項の n＝0 の場合と同じなので、

$$= -jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + jq^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= -jq^{-1}z^{-2}\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}\}$$

$$= -jq^{-1}z^{-2}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{z^{2n+1} - z^{-(2n+1)}\}] = \mu\vartheta_1(v)$$

$$\vartheta_2(v+1+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2}\{(-qz)^{2n+1} + (-qz)^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^{2n+1} q^{2n+1} z^{2n+1} + (-1)^{-2n-1} q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{(-1)^{2n}(-1) q^{2n+1} z^{2n+1} + (\frac{1}{-1})^{2n}(\frac{1}{-1}) q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{-q^{2n+1} z^{2n+1} - q^{-(2n+1)} z^{-(2n+1)}\}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{2n+1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} q^{-2n-1} z^{-2n-1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+3n+\frac{5}{4}} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-n-\frac{3}{4}} z^{-2n-1}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2-1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2-1} z^{-2n-1}$$

$$= -q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= -q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{2n+1} - q^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^2 z^{-2} z^{-2n-1}$$

$$= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{3}{2})^2} z^{2n+3} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-\frac{1}{2})^2} z^{-2n+1}$$

第 1 項を n＝1 から、第 2 項を n＝－1 からに変更しますと、

$$= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1+\frac{3}{2})^2} z^{2(n-1)+3} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} q^{(n+1-\frac{1}{2})^2} z^{-2(n+1)+1}$$

$$= -q^{-1} z^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-1} z^{-2} \sum_{n=-1}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

第 2 項の n＝－1 の場合は、第 1 項の n＝0 の場合と同じですので、

$$= -q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} - q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}\{\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} z^{-2n-1}\}$$

$$= -q^{-1}z^{-2}[\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} \{z^{2n+1} + z^{-(2n+1)}\}] = \mu\vartheta_2(v)$$

$$\vartheta_3(v+1+\tau) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\{(-qz)^{2n} + (-qz)^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\{(-1)^{2n}q^{2n}z^{2n} + (\frac{1}{-1})^{2n}q^{-2n}z^{-2n}\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}q^{2n}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}q^{-2n}z^{-2n}$$

第 1 項の 1 を第 2 項に吸収し、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}q^{2n}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}q^{-2n}z^{-2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+2n}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2-2n}z^{-2n}$$

q の指数について平方完成しますと、

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2-1}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2-1}z^{-2n}$$

$$= q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2n} + q^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2}z^{-2n}$$

$$= q^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2}z^{-2}z^{2n} + q^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2}z^{2}z^{-2}z^{-2n}$$

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2n+2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n-1)^2}z^{-2n+2}$$

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2n+2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n-1+1)^2}z^{-2(n+1)+2}$$

$$= q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2n+2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2}z^{-2n}$$

第 2 項の n＝0 の場合を外に出し、

$$= q^{-1}z^{-2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} q^{(n+1)^2}z^{2n+2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}z^{-2n}$$

第 1 項の n を 1 からに変更し、

$$= q^{-1}z^{-2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{(n+1-1)^2}z^{2(n-1)+2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}z^{-2n}$$

$$= q^{-1}z^{-2} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}z^{2n} + q^{-1}z^{-2}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}z^{-2n}$$

$$= q^{-1}z^{-2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}z^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}z^{-2n})$$

$$= q^{-1}z^{-2}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}(z^{2n} + z^{-2n})\} = \mu\vartheta_3(v)$$

となります。以上です。

目次へ戻る