RLC 直列回路の交流過渡現象(3)　　2022 年 8 月 30 日　目次へ戻る

2023.2.7　2023.2.9　2023.3.29　2023.5.14　訂正

ラプラス変換で求めます。

(3)共役複素数根の場合

sinωt に初期位相 θ がある場合、加法定理により、

$$\sin(\omega t+\theta)=\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta$$

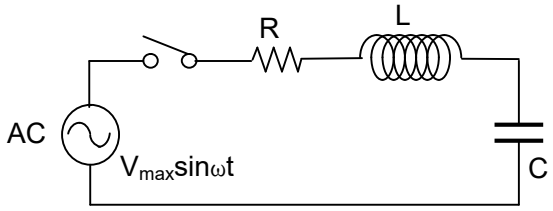
となります。ラプラス変換 L は、

$$L(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)$$

$$=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\cos\theta+\frac{s}{s^2+\omega^2}\sin\theta$$

$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{s^2+\omega^2}$$

$$=\frac{\omega\cos\theta+s\sin\theta}{(s-j\omega)(s+j\omega)}$$



になります。最大値が V_{max} の正弦波の場合は、この式の頭に V_{max} が付きます。

右図でスイッチを入れた瞬間、電源 $V_{max}\sin\omega t$ の位相が θ の場合、ラプラスの世界での電流 I(s)は、

$$I(s)=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)}\div\left(R+Ls+\frac{1}{sC}\right)$$

$$=\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)}\quad\cdots①$$

となります。因数分解しやすくする為、分子分母に $\frac{s}{L}$ を掛けますと、

$$=\frac{\frac{s}{L}\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\cdot\frac{s}{L}\cdot\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)}$$

$$=\frac{\frac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}\right)}$$

になります。分母の$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}$を＝0 と置いた時の根（解）は、

$$\frac{-\frac{R}{L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2-\frac{4}{LC}}}{2}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-\frac{4}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-\frac{L\cdot 4}{L\cdot LC}}$$

$$=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{L^2}\left(R^2-\frac{4L}{C}\right)}=-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2L}\sqrt{R^2-\frac{4L}{C}}$$

です。根号内、$R^2-\frac{4L}{C}$の状態によって次の 3 種類に分かれます。

(1)　根号内が正の為、2 実根の場合。(1)をご覧下さい。

(2)　根号内が零の為、実数の重根の場合。(2)をご覧下さい。

(3)　根号内が負の為、共役複素数根の場合。本章をご覧下さい。

共役複素数根の場合、$R^2<\frac{4L}{C}$の為、根号内が負になります。根号内の計算を逆にして、

$$\alpha=\frac{R}{2L}\qquad \beta=\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}$$

にします。根（解）を s_1、s_2 としますと、β の前に j が付き、

$$s_1=-\alpha+j\beta\qquad s_2=-\alpha-j\beta$$

となり、共役（きょうやく）複素数の根になります。

因数定理により、分母の$s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}$は因数分解され、

$$=\frac{\frac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_1)(s-s_2)}\quad\cdot\cdot\cdot②$$

となります。ラプラス逆変換の為、部分分数分解を行いますので、

$$=\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s-s_1}+\frac{E}{s-s_2}$$

と置きます。A、B、D、E を求めます。ヘビサイドの目隠し法を使います。ヘビサイドの目隠し法については「部分分数分解」の章を御覧下さい。

定常項に関係する A の値を求める時は、左辺に①式を用い、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に$(s-j\omega)$を掛け、

$$(s-j\omega)\cdot\frac{V_{max}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = (s-j\omega)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}\right)$$

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = A + \frac{(s-j\omega)B}{s+j\omega} + \frac{(s-j\omega)D}{s-s_1} + \frac{(s-j\omega)E}{s-s_2}$$

$s = j\omega$と置きますと、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta + j\omega\sin\theta)}{(j\omega+j\omega)\left(j\omega L+R+\frac{1}{j\omega C}\right)} = A + \frac{(j\omega-j\omega)B}{j\omega+j\omega} + \frac{(j\omega-j\omega)D}{j\omega-s_1} + \frac{(j\omega-j\omega)E}{j\omega-s_2}$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta + j\sin\theta)}{2j\omega\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)} = A$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta + j\sin\theta)}{2j\left(R+j\omega L-j\frac{1}{\omega C}\right)} = A$$

$$\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\left\{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right\}} = A$$

です。オイラーの公式、$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$を使いました。

同じく定常項に関係するBの値を求める時も、左辺に①式を用い、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta + s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)} = \frac{A}{s-j\omega} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{D}{s-s_1} + \frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に$(s+j\omega)$を掛け、

$$(s+j\omega)\cdot\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)(s+j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)}=(s+j\omega)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s-s_1}+\frac{E}{s-s_2}\right)$$

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{(s-j\omega)\left(Ls+R+\frac{1}{sC}\right)}=\frac{(s+j\omega)A}{s-j\omega}+B+\frac{(s+j\omega)D}{s-s_1}+\frac{(s+j\omega)E}{s-s_2}$$

$s=-j\omega$ と置きますと、

$$\frac{V_{max}(\omega\cos\theta-j\omega\sin\theta)}{(-j\omega-j\omega)\left(-j\omega L+R+\frac{1}{-j\omega C}\right)}=\frac{(-j\omega+j\omega)A}{-j\omega-j\omega}+B+\frac{(-j\omega+j\omega)D}{-j\omega-s_1}+\frac{(-j\omega+j\omega)E}{-j\omega-s_2}$$

$$\frac{V_{max}\omega(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2j\omega\left(R-j\omega L-\frac{1}{j\omega C}\right)}=B$$

$$\frac{V_{max}(\cos\theta-j\sin\theta)}{-2j\left(R-j\omega L+j\frac{1}{\omega C}\right)}=B$$

$$\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\left\{R-j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right\}}=B$$

です。オイラーの公式、$e^{-j\theta}=\cos\theta-j\sin\theta$ を使いました。

過渡項に関係する D の値を求める時は、左辺に②式を用い、

$$\frac{\frac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s-s_1}+\frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に $(s-s_1)$ を掛け、

$$(s-s_1)\cdot\frac{\frac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_1)(s-s_2)}=(s-s_1)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s-s_1}+\frac{E}{s-s_2}\right)$$

$$\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_2)}=\frac{(s-s_1)A}{s-j\omega}+\frac{(s-s_1)B}{s+j\omega}+D+\frac{(s-s_1)E}{s-s_2}$$

$s=s_1$と置きますと、

$$\frac{\dfrac{s_1\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L}}{(s_1-j\omega)(s_1+j\omega)(s_1-s_2)}=\frac{(s_1-s_1)A}{s_1-j\omega}+\frac{(s_1-s_1)B}{s_1+j\omega}+D+\frac{(s_1-s_1)E}{s_1-s_2}$$

$$\frac{\dfrac{s_1\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L}}{(s_1-j\omega)(s_1+j\omega)(s_1-s_2)}=D$$

$$\frac{\dfrac{s_1\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L}}{(s_1^{\ 2}+j\omega s_1-j\omega s_1+\omega^2)(s_1-s_2)}=D$$

$$\frac{\dfrac{s_1\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L}}{(s_1^{\ 2}+\omega^2)(s_1-s_2)}=D$$

$$\frac{V_{max}\cdot s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L(s_1^{\ 2}+\omega^2)(s_1-s_2)}=D$$

です。

同じく過渡項に関係するＥの値を求める時も、左辺に②式を用い、

$$\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s-s_1}+\frac{E}{s-s_2}$$

と置きますと便利です。両辺に$(s-s_2)$を掛け、

$$(s-s_2)\cdot\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_1)(s-s_2)}=(s-s_2)\cdot\left(\frac{A}{s-j\omega}+\frac{B}{s+j\omega}+\frac{D}{s-s_1}+\frac{E}{s-s_2}\right)$$

$$\frac{\dfrac{s\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s\sin\theta)}{L}}{(s-j\omega)(s+j\omega)(s-s_1)}=\frac{(s-s_2)A}{s-j\omega}+\frac{(s-s_2)B}{s+j\omega}+\frac{(s-s_2)D}{s-s_2}+E$$

$s=s_2$ と置きますと、

$$\frac{\dfrac{s_2\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L}}{(s_2-j\omega)(s_2+j\omega)(s_2-s_1)}=\frac{(s_2-s_2)A}{s_2-j\omega}+\frac{(s_2-s_2)B}{s_2+j\omega}+\frac{(s_2-s_2)D}{s_2-s_2}+E$$

$$\frac{\dfrac{s_2\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L}}{(s_2-j\omega)(s_2+j\omega)(s_2-s_1)}=E$$

$$\frac{\dfrac{s_2\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L}}{({s_2}^2+j\omega s_2-j\omega s_2+\omega^2)(s_2-s_1)}=E$$

$$\frac{\dfrac{s_2\cdot V_{max}(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L}}{({s_2}^2+\omega^2)(s_2-s_1)}=E$$

$$\frac{V_{max}\cdot s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L({s_2}^2+\omega^2)(s_2-s_1)}=E$$

です。

A、B、D、E が求まりました。ラプラス逆変換をして I を求めますと、

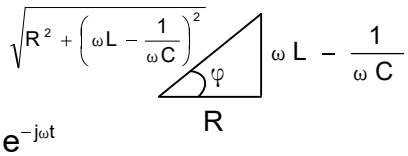
$$I=L^{-1}\left[\frac{\dfrac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\left\{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)\right\}}}{s-j\omega}+\frac{\dfrac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\left\{R-j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)\right\}}}{s+j\omega}+\frac{\dfrac{V_{max}\cdot s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L({s_1}^2+\omega^2)(s_1-s_2)}}{s-s_1}+\frac{\dfrac{V_{max}\cdot s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L({s_2}^2+\omega^2)(s_2-s_1)}}{s-s_2}\right]$$

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\left\{R+j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)\right\}}\cdot e^{j\omega t}+\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\left\{R-j\left(\omega L-\dfrac{1}{\omega C}\right)\right\}}\cdot e^{-j\omega t}$$

$$+\frac{V_{max}\cdot s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L(s_1{}^2+\omega^2)(s_1-s_2)}\cdot e^{s_1t}+\frac{V_{max}\cdot s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L(s_2{}^2+\omega^2)(s_2-s_1)}\cdot e^{s_2t}$$

になります。上式の前 2 項が定常項です。後ろ 2 項が過渡項です。定常項、過渡項に分けて計算します。

(1)定常項の計算



$$\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\left\{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right\}}\cdot e^{j\omega t}+\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\left\{R-j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right\}}\cdot e^{-j\omega t}$$

分母の中括弧内複素数を極形式に直しますと、（右上の図をご覧下さい。）

$$=\frac{V_{max}\cdot e^{j\theta}}{2j\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{j\varphi}}\cdot e^{j\omega t}+\frac{V_{max}\cdot e^{-j\theta}}{-2j\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cdot e^{-j\varphi}}\cdot e^{-j\omega t}$$

$$=\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{j\omega t}\cdot e^{j\theta}\cdot e^{-j\varphi}+\frac{V_{max}}{-2j\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{-j\omega t}\cdot e^{-j\theta}\cdot e^{j\varphi}$$

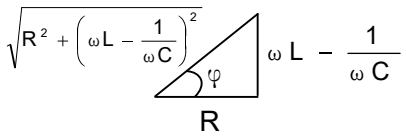
$$=\frac{V_{max}}{2j\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}+\frac{V_{max}}{-2j\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}$$

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot\frac{e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}}{2j}+\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot\frac{e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}}{-2j}$$

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot\left(\frac{e^{j(\omega t+\theta-\varphi)}-e^{-j(\omega t+\theta-\varphi)}}{2j}\right)$$

$$=\frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\cdot\sin(\omega t+\theta-\varphi)$$

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$ と置きますと、



$$=\frac{V_{max}}{Z}\cdot\sin(\omega t+\theta-\varphi)$$

$\frac{V_{max}}{Z}=I_{max}$ としますと、

$$=I_{max}\cdot\sin(\omega t+\theta-\varphi)$$

になりました。θ はスイッチオン時の正弦波初期位相、φ はインピーダンスの角度です。

(2)過渡項の計算

$$\frac{V_{max}\cdot s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)}{L(s_1^{\ 2}+\omega^2)(s_1-s_2)}\cdot e^{s_1t}+\frac{V_{max}\cdot s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)}{L(s_2^{\ 2}+\omega^2)(s_2-s_1)}\cdot e^{s_2t}$$

$$=\frac{V_{max}\cdot s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)\cdot e^{s_1t}}{L(s_1^{\ 2}+\omega^2)(s_1-s_2)}+\frac{V_{max}\cdot s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)\cdot e^{s_2t}}{L(s_2^{\ 2}+\omega^2)\cdot-(s_1-s_2)}$$

$$=\frac{V_{max}\cdot s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)\cdot e^{s_1t}}{L(s_1^{\ 2}+\omega^2)(s_1-s_2)}-\frac{V_{max}\cdot s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)\cdot e^{s_2t}}{L(s_2^{\ 2}+\omega^2)(s_1-s_2)}$$

$$=\frac{V_{max}}{L(s_1-s_2)}\left\{\frac{s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)\cdot e^{s_1t}}{s_1^{\ 2}+\omega^2}-\frac{s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)\cdot e^{s_2t}}{s_2^{\ 2}+\omega^2}\right\}$$

です。$s_1-s_2=-\alpha+j\beta-(-\alpha-j\beta)=-\alpha+j\beta+\alpha+j\beta=2j\beta$ ですから、

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\left\{\frac{s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)\cdot e^{s_1t}}{s_1^{\ 2}+\omega^2}-\frac{s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)\cdot e^{s_2t}}{s_2^{\ 2}+\omega^2}\right\}$$

です。中括弧内を通分しますと、

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\left\{\frac{s_1(\omega\cos\theta+s_1\sin\theta)(s_2^{\ 2}+\omega^2)\,e^{s_1t}-s_2(\omega\cos\theta+s_2\sin\theta)(s_1^{\ 2}+\omega^2)\,e^{s_2t}}{(s_1^{\ 2}+\omega^2)(s_2^{\ 2}+\omega^2)}\right\}$$

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\left[\frac{s_1\{\omega(s_2^{\ 2}+\omega^2)\cos\theta+s_1(s_2^{\ 2}+\omega^2)\sin\theta\}\,e^{s_1t}}{(s_1^{\ 2}+\omega^2)}\right.$$

$$\left.\frac{-s_2\{\omega(s_1{}^2+\omega^2)\cos\theta+s_2(s_1{}^2+\omega^2)\sin\theta\}\,e^{s_2t}}{(s_2{}^2+\omega^2)}\right]$$

です。通分した分母を計算しますと、

$$(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)=\{(-\alpha+j\beta)^2+\omega^2\}\{(-\alpha-j\beta)^2+\omega^2\}$$

$$\begin{aligned}
&=\{(-\alpha+j\beta)(-\alpha+j\beta)+\omega^2\}\{(-\alpha-j\beta)(-\alpha-j\beta)+\omega^2\}\\
&=(\alpha^2-j2\alpha\beta-\beta^2+\omega^2)(\alpha^2+j2\alpha\beta-\beta^2+\omega^2)\\
&=\alpha^4+j2\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha^2\omega^2-j2\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2+j2\alpha\beta^3-j2\alpha\beta\omega^2\\
&\qquad-\alpha^2\beta^2-j2\alpha\beta^3+\beta^4-\beta^2\omega^2+\alpha^2\omega^2+j2\alpha\beta\omega^2-\beta^2\omega^2+\omega^4\\
&=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\omega^2+\beta^4-2\beta^2\omega^2+\omega^4\\
&=(\alpha^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\omega^2+\beta^4-2\beta^2\omega^2+\omega^4)+4\alpha^2\omega^2\\
&=(\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\omega^2+\alpha^2\beta^2+\beta^4-\beta^2\omega^2-\alpha^2\omega^2-\beta^2\omega^2+\omega^4)+4\alpha^2\omega^2\\
&=\{\alpha^4-\alpha^2(j\beta)^2-\alpha^2\omega^2-\alpha^2(j\beta)^2+(j\beta)^4+(j\beta)^2\omega^2-\alpha^2\omega^2+(j\beta)^2\omega^2+\omega^4\}+4\alpha^2\omega^2\\
&=\alpha^2\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}-(j\beta)^2\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}-\omega^2\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}+4\alpha^2\omega^2\\
&=\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}+4\alpha^2\omega^2\\
&=\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}^2+(2\alpha\omega)^2\quad\cdot\cdot\cdot③
\end{aligned}$$

になります。③式に α と β の値を代入しますと、

$$=\left\{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\left(j\cdot\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C}-R^2}\right)^2-\omega^2\right\}^2+\left(2\cdot\frac{R}{2L}\cdot\omega\right)^2$$

$$=\left[\frac{R^2}{4L^2}-\left\{-\frac{1}{4L^2}\left(\frac{4L}{C}-R^2\right)\right\}-\omega^2\right]^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}$$

$$=\left\{\frac{R^2}{4L^2}-\left(-\frac{1}{LC}+\frac{R^2}{4L^2}\right)-\omega^2\right\}^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}$$

$$=\left\{\frac{R^2}{4L^2}+\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}-\omega^2\right\}^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}$$

$$=\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\frac{R^2\omega^2}{L^2}$$

$$=\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)+\frac{R^2\omega^2}{L^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{L^2C^2} - \frac{2\omega^2}{LC} + \omega^4 + \frac{R^2\omega^2}{L^2} \\
&= \frac{R^2\omega^2}{L^2} + \frac{1}{L^2C^2} - \frac{2\omega^2}{LC} + \omega^4 \\
&= \frac{\omega^2}{L^2}\left(R^2 + \frac{1}{\omega^2C^2} - \frac{2L}{C} + \omega^2L^2\right) \\
&= \frac{\omega^2}{L^2}\left\{R^2 + \left(\omega^2L^2 - \frac{2L}{C} + \frac{1}{\omega^2C^2}\right)\right\} \\
&= \frac{\omega^2}{L^2}\left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\} \cdot\cdot\cdot ④
\end{aligned}
$$

になりました。通分した分母の計算は上手く行き、インピーダンスの絶対値の 2 乗に $\frac{\omega^2}{L^2}$ を掛けた形になります。通分しませんと根号が取れず、この様に上手く行きません。

③式で、$(s_1{}^2 + \omega^2)(s_2{}^2 + \omega^2)$ を $\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2$ に変形した訳は以下の通りです。

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$j\beta = j\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}$$

ですから、

$$\alpha^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{R^2}{4L^2}$$

$$(j\beta)^2 = \left(j\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}\right)^2 = -\frac{1}{4L^2}\left(\frac{4L}{C} - R^2\right) = -\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}$$

です。α^2 から $(j\beta)^2$ を引きますと、

$$\alpha^2 - (j\beta)^2 = \frac{R^2}{4L^2} - \left(-\frac{1}{LC} + \frac{R^2}{4L^2}\right) = \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$$

になります。更に ω^2 を引きますと、

$$\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2 = \frac{1}{LC} - \omega^2 = -\omega^2 + \frac{1}{LC} = -\frac{\omega}{L}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

になり、$-\dfrac{\omega}{L}$ を掛けたリアクタンス成分が出ます。

また、

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

ですから 2 を掛けますと、

$$2\alpha = 2 \cdot \frac{R}{2L} = \frac{R}{L}$$

になります。更に ω を掛けますと、

$$2\alpha\omega = \frac{\omega R}{L}$$

となり、$\dfrac{\omega}{L}$ を掛けた抵抗成分が出ます。

$\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と $2\alpha\omega$ をそれぞれ 2 乗して足しますと、

$$\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2 = \left\{-\frac{\omega}{L}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right\}^2 + \left(\frac{\omega R}{L}\right)^2$$

$$= \frac{\omega^2}{L^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{L^2}$$

$$= \frac{\omega^2}{L^2}R^2 + \frac{\omega^2}{L^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$$

$$= \frac{\omega^2}{L^2}\left\{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right\}$$

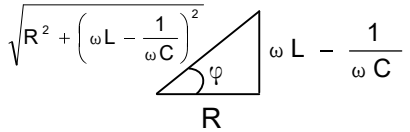
になり、$\dfrac{\omega^2}{L^2}$ を掛けたインピーダンスの絶対値の 2 乗が出ます。

この $\dfrac{\omega^2}{L^2}\left\{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2\right\}$ の式で、$R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2 = Z^2$ としますと、

$$(s_1{}^2 + \omega^2)(s_2{}^2 + \omega^2) = \{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\}^2 + (2\alpha\omega)^2 = \frac{\omega^2}{L^2}Z^2$$

です。この式を平方根にしますと、

$$\sqrt{(s_1{}^2 + \omega^2)(s_2{}^2 + \omega^2)} = \frac{\omega Z}{L}$$



です。$2\alpha\omega = \frac{\omega}{L}R$ を上式で割りますと、

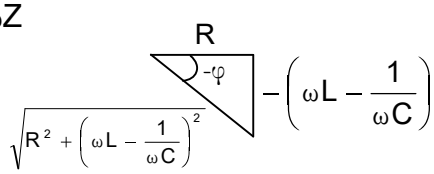
$$\frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}} = \frac{\frac{\omega R}{L}}{\frac{\omega Z}{L}} = \frac{\omega R}{L} \bullet \frac{L}{\omega Z} = \frac{R}{Z} = \cos\varphi \quad ・・・⑤$$

になりインピーダンスの $\cos\varphi$ が生じます。$\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2 = -\frac{\omega}{L}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ を割りますと、

$$\frac{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2}{\sqrt{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}} = \frac{\frac{-\omega\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{L}}{\frac{\omega Z}{L}}$$

$$= \frac{-\omega\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{L}\cdot\frac{L}{\omega Z}$$

$$= \frac{-\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}{Z}$$



$$= \sin(-\varphi)$$

$$= -\sin\varphi \quad ・・・⑥$$

になりインピーダンスの $-\sin\varphi$ が生じます。

インピーダンスのリアクタンス成分と抵抗成分とを分ける為に、

$$(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2) = \{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}^2+(2\alpha\omega)^2$$

と変形致しました。

通分後の分子前半 $s_1\{\omega(s_2{}^2+\omega^2)\cos\theta + s_1(s_2{}^2+\omega^2)\sin\theta\}\cdot e^{s_1 t}$ 中の $\omega(s_2{}^2+\omega^2)$ を計算します。ここでもリアクタンス成分 $\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\omega(s_2{}^2+\omega^2) = \omega\{(-\alpha-j\beta)^2+\omega^2\}$$

$$= \omega\{(-\alpha-j\beta)(-\alpha-j\beta)+\omega^2\}$$

$$= \omega(\alpha^2+j2\alpha\beta-\beta^2+\omega^2)$$

$$= \alpha^2\omega+j2\alpha\beta\omega-\beta^2\omega+\omega^3$$

$$= -\alpha^2\omega-\beta^2\omega+\omega^3+2\alpha^2\omega+j2\alpha\beta\omega$$

$$= -\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega$$

です。更に中括弧の前にある $s_1 = -\alpha + j\beta = -(\alpha - j\beta)$ を掛けますと、

$$s_1 \cdot \omega({s_2}^2 + \omega^2) = -(\alpha - j\beta)[-\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega]$$

$$= \omega(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha - j\beta)(\alpha + j\beta)2\alpha\omega$$
$$= \omega(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega$$

になりました。通分後の分子前半、中括弧内の $s_1({s_2}^2 + \omega^2)$ を計算します。リアクタンス成分 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$s_1({s_2}^2 + \omega^2) = (-\alpha + j\beta)\{(-\alpha - j\beta)^2 + \omega^2\}$$

$$= (-\alpha + j\beta)\{(-\alpha - j\beta)(-\alpha - j\beta) + \omega^2\}$$
$$= (-\alpha + j\beta)(\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2)$$
$$= -\alpha^3 - j2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 + j\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 - j\beta^3 + j\beta\omega^2$$
$$= -\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \alpha\omega^2 - j\alpha^2\beta - j\beta^3 + j\beta\omega^2 - 2\alpha\omega^2$$
$$= -\alpha\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - j\beta\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2$$
$$= (-\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2$$
$$= -(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2$$

更に中括弧の前にある $s_1 = -\alpha + j\beta = -(\alpha - j\beta)$ を掛けますと、

$$s_1 \cdot s_1({s_2}^2 + \omega^2) = -(\alpha - j\beta)[-(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2]$$

$$= (\alpha - j\beta)(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2$$

です。

通分後の分子後半 $s_2\{\omega({s_1}^2 + \omega^2)\cos\theta + s_2({s_1}^2 + \omega^2)\sin\theta\} \cdot e^{s_2 t}$ 中の $\omega({s_1}^2 + \omega^2)$ を計算します。リアクタンス成分 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$\omega({s_1}^2 + \omega^2) = \omega\{(-\alpha + j\beta)^2 + \omega^2\}$$

$$= \omega\{(-\alpha + j\beta)(-\alpha + j\beta) + \omega^2\}$$
$$= \omega(\alpha^2 - j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2)$$
$$= \alpha^2\omega - j2\alpha\beta\omega - \beta^2\omega + \omega^3$$
$$= -\alpha^2\omega - \beta^2\omega + \omega^3 + 2\alpha^2\omega - j2\alpha\beta\omega$$
$$= -\omega(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2) + 2\alpha^2\omega - j2\alpha\beta\omega$$
$$= -\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega$$

です。更に中括弧の前にある $s_2 = -\alpha - j\beta = -(\alpha + j\beta)$ を掛けますと、

$$s_2 \cdot \omega(s_1{}^2 + \omega^2) = -(\alpha + j\beta)[-\omega\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega]$$

$$= \omega(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)2\alpha\omega$$
$$= \omega(\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega$$

です。

通分後の分子後半、中括弧内の $s_2(s_1{}^2 + \omega^2)$ を計算します。

リアクタンス成分 $\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2$ と、抵抗成分 $2\alpha\omega$ に関係づけて行きます。

$$s_2(s_1{}^2 + \omega^2) = (-\alpha - j\beta)\{(-\alpha + j\beta)^2 + \omega^2\}$$

$$= (-\alpha - j\beta)\{(-\alpha + j\beta)(-\alpha + j\beta) + \omega^2\}$$
$$= (-\alpha - j\beta)(\alpha^2 - j2\alpha\beta - \beta^2 + \omega^2)$$
$$= -\alpha^3 + j2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 - j\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + j\beta^3 - j\beta\omega^2$$
$$= -\alpha^3 - \alpha\beta^2 - \alpha\omega^2 + j\alpha^2\beta + j\beta^3 - j\beta\omega^2$$
$$= -\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \alpha\omega^2 + j\alpha^2\beta + j\beta^3 - j\beta\omega^2 - 2\alpha\omega^2$$
$$= -\alpha\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + j\beta\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2$$
$$= (-\alpha + j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2$$
$$= -(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2$$

です。更に中括弧の前にある $s_2 = -\alpha - j\beta = -(\alpha + j\beta)$ を掛けますと、

$$s_2 \cdot s_2(s_1{}^2 + \omega^2) = -(\alpha + j\beta)[-(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} - 2\alpha\omega^2]$$

$$= (\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega^2$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2)\{\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2\} + (\alpha + j\beta)2\alpha\omega^2$$

です。以上の結果を使い元の式を書き直しますと、

$$= \frac{V_{max}}{2j\beta L} \bullet \frac{[\{\omega(\alpha - j\beta)(\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2) - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega\}\cos\theta}{(s_1{}^2 + \omega^2)\cdot}$$

$$\frac{+\{(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2) + (\alpha - j\beta)2\alpha\omega^2\}\sin\theta]\, e^{s_1 t}}{}$$

$$\frac{-[\{\omega(\alpha + j\beta)(\alpha^2 - (j\beta)^2 - \omega^2) - (\alpha^2 + \beta^2)2\alpha\omega\}\cos\theta}{(s_2{}^2 + \omega^2)}$$

$$+\{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2)+(\alpha+j\beta)2\alpha\omega^2\}\sin\theta\,]\,e^{s_2t}$$

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\bullet\left\{\frac{\omega(\alpha-j\beta)\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\cos\theta\cdot e^{s_1t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\,2\alpha\omega\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}\right.$$

$$+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\sin\theta\cdot e^{s_1t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}+\frac{(\alpha-j\beta)2\alpha\omega^2\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}$$

$$-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\cos\theta\cdot e^{s_2t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}+\frac{(\alpha^2+\beta^2)2\alpha\omega\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}$$

$$\left.-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\sin\theta\cdot e^{s_2t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}-\frac{(\alpha+j\beta)2\alpha\omega^2\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}\right\}$$

となります。分子分母に$\frac{\omega Z}{L}$を掛け、⑤式、⑥式を使いますと、

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\cdot\left\{\frac{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot 2\alpha\omega\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}\right.$$

$$+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}+\frac{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot 2\alpha\omega\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}$$

$$-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot 2\alpha\omega\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}$$

$$\left.-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\{\alpha^2-(j\beta)^2-\omega^2\}\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot 2\alpha\omega\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}\cdot(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}\right\}$$

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\cdot\left\{\frac{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}\right.$$

$$+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1 t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}+\frac{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1 t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}$$

$$-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2 t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2 t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}$$

$$\left.-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2 t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2 t}}{(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)}\right\}$$

です。$(s_1{}^2+\omega^2)(s_2{}^2+\omega^2)=\frac{\omega^2}{L^2}Z^2=\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2$ ですので、

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\cdot\left\{\frac{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}\right.$$

$$+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}+\frac{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}$$

$$-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}$$

$$\left.-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\frac{\omega Z}{L}(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\frac{\omega Z}{L}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2 t}}{\left(\frac{\omega Z}{L}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\cdot\left\{\frac{\omega(\alpha-j\beta)(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}}-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1 t}}{\frac{\omega Z}{L}}\right.$$

$$+\frac{(\alpha^2+\beta^2)(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}}{\frac{\omega Z}{L}}+\frac{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}}{\frac{\omega Z}{L}}$$

$$-\frac{\omega(\alpha+j\beta)(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}}+\frac{(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}}$$

$$\left.-\frac{(\alpha^2+\beta^2)(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}}-\frac{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}}{\frac{\omega Z}{L}}\right\}$$

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\bullet\frac{1}{\frac{\omega Z}{L}}\{\omega(\alpha-j\beta)(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}$$

$$+(\alpha^2+\beta^2)(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}+\omega(\alpha-j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}$$

$$-\omega(\alpha+j\beta)(-\sin\varphi)\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}+(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}$$

$$-(\alpha^2+\beta^2)(-\sin\varphi)\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}-\omega(\alpha+j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}\}$$

となります。括弧内のーを前に出しますと、

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\bullet\frac{1}{\frac{\omega Z}{L}}\{-\omega(\alpha-j\beta)\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}$$

$$-(\alpha^2+\beta^2)\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}+\omega(\alpha-j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}$$

$$+\omega(\alpha+j\beta)\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}+(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}$$

$$+(\alpha^2+\beta^2)\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}-\omega(\alpha+j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}\}$$

になります。加法定理が成り立つように並べかえますと、

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta L}\bullet\frac{L}{\omega Z}\{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}-\omega(\alpha-j\beta)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}$$

$$-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_1t}-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_1t}$$

$$-\omega(\alpha+j\beta)\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2t}+\omega(\alpha+j\beta)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2t}$$

$$+(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot e^{s_2 t}+(\alpha^2+\beta^2)\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot e^{s_2 t}\}$$

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta\omega Z}\cdot\{\omega(\alpha-j\beta)(\sin\theta\cdot\cos\varphi-\cos\theta\cdot\sin\varphi)\cdot e^{s_1 t}$$

$$-(\alpha^2+\beta^2)(\cos\theta\cdot\cos\varphi+\sin\theta\cdot\sin\varphi)\cdot e^{s_1 t}$$

$$-\omega(\alpha+j\beta)(\sin\theta\cdot\cos\varphi-\cos\theta\cdot\sin\varphi)\cdot e^{s_2 t}$$

$$+(\alpha^2+\beta^2)(\cos\theta\cdot\cos\varphi+\sin\theta\cdot\sin\varphi)\cdot e^{s_2 t}\}$$

になります。加法定理を行いますと、

$$=\frac{V_{max}}{2j\beta\omega Z}\cdot[\{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\}\cdot e^{s_1 t}$$

$$-\{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\}\cdot e^{s_2 t}]$$

です。$\frac{V_{max}}{Z}=I_{max}$ とし、s_1、s_2 に数値を代入しますと、

$$=\frac{I_{max}}{2j\beta\omega}\cdot[\{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\}\cdot e^{(-\alpha+j\beta)t}$$

$$-\{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\}\cdot e^{(-\alpha-j\beta)t}]$$

$$=\frac{I_{max}}{2j\beta\omega}\cdot[\{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\}\cdot e^{-\alpha t}e^{j\beta t}$$

$$-\{\omega(\alpha+j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\}\cdot e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}]$$

$$=\frac{I_{max}}{2j\beta\omega}\cdot\{\omega(\alpha-j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{j\beta t}-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{j\beta t}$$

$$-\omega(\alpha+j\beta)\cdot\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}+(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}\}$$

$$=\frac{I_{max}}{2j\beta\omega}\cdot\{\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}\cdot\omega(\alpha-j\beta)\cdot e^{j\beta t}-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{j\beta t}$$

$$-\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}\cdot\omega(\alpha+j\beta)\cdot e^{-j\beta t}+(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}\}$$

$$=\frac{I_{max}}{2j\beta\omega}\cdot\{\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}\cdot\omega(\alpha-j\beta)\cdot e^{j\beta t}-\sin(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}\cdot\omega(\alpha+j\beta)\cdot e^{-j\beta t}$$

$$-(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{j\beta t}+(\alpha^2+\beta^2)\cdot\cos(\theta-\varphi)\cdot e^{-\alpha t}e^{-j\beta t}\}$$

$$= \frac{I_{max}}{2j\beta\omega} \cdot [\, \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \{\, \omega(\alpha - j\beta) \cdot e^{j\beta t} - \omega(\alpha + j\beta) \cdot e^{-j\beta t} \,\}$$

$$- (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \{\, e^{j\beta t} - e^{-j\beta t} \,\}\,]$$

$e^{j\beta t} = \cos\beta t + j\sin\beta t$、$e^{-j\beta t} = \cos\beta t - j\sin\beta t$、$e^{j\beta t} - e^{-j\beta t} = 2j\sin\beta t$ を使いますと、

$$= \frac{I_{max}}{2j\beta\omega} \cdot [\, \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \{\, \omega(\alpha - j\beta)(\cos\beta t + j\sin\beta t) - \omega(\alpha + j\beta)(\cos\beta t - j\sin\beta t) \,\}$$

$$- (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot 2j\sin\beta t \,\}\,]$$

$$= \frac{I_{max}}{2j\beta\omega} \cdot \{\, \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (\alpha\omega\cos\beta t + j\alpha\omega\sin\beta t - j\beta\omega\cos\beta t + \beta\omega\sin\beta t$$

$$- \alpha\omega\cos\beta t + j\alpha\omega\sin\beta t - j\beta\omega\cos\beta t - \beta\omega\sin\beta t) - (\alpha^2 + \beta^2)\cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot 2j\sin\beta t \,\}$$

$$= \frac{I_{max}}{2j\beta\omega} \cdot \{\, \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (2j\alpha\omega \sin\beta t - 2j\beta\omega \cos\beta t) - (\alpha^2 + \beta^2)\cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot 2j\sin\beta t \,\}$$

$$= \frac{I_{max}}{2j\beta\omega} \cdot \{\, \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (2j\omega)(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) - 2j(\alpha^2 + \beta^2)\cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta t \,\}$$

$$= I_{max} \left\{ \frac{1}{2j\beta\omega} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (2j\omega)(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) - \frac{1}{2j\beta\omega} \cdot 2j(\alpha^2 + \beta^2)\cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta t \right\}$$

$$= I_{max} \left\{ \frac{1}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} (\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t) - \frac{1}{\beta\omega} \cdot (\alpha^2 + \beta^2)\cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin\beta t \right\}$$

三角関数の合成公式により、（この章の最後に説明が有ります。）

$\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \sin\left(\beta t - \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}\right)$ です。$\tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} = \Phi$ とします。

$$= I_{max} \cdot \left\{ \frac{1}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, \sin(\beta t - \Phi) - \frac{1}{\beta\omega} \cdot (\alpha^2 + \beta^2)\cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sin\beta t \right\}$$

$$= I_{max} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cdot \sin(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t - \Phi) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta\omega} \cdot \cos(\theta - \varphi) \cdot e^{-\alpha t} \sin\beta t \right\}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}\right)^2$$

$$= \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{4L^2}\left(\frac{4L}{C} - R^2\right)$$

$$= \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

$$= \frac{1}{LC}$$

ですから、

$$= I_{max} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \Phi) - \frac{\frac{1}{LC}}{\frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin \beta t \right\}$$

$$= I_{max} \cdot \left\{ \frac{2L \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}}{2L \cdot \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \Phi) - \frac{2L \cdot \frac{1}{LC}}{2L \cdot \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin \beta t \right\}$$

$$= I_{max} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{L} \cdot \sqrt{L}}{\sqrt{L} \cdot \sqrt{C}}}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \sin(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin(\beta t - \Phi) - \frac{C \cdot \frac{2}{C}}{C\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2} \cdot \omega} \cos(\theta - \varphi) e^{-\alpha t} \sin \beta t \right\}$$

$$= I_{max} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\theta - \varphi) \sin(\beta t - \Phi) - \frac{2}{\omega C \cdot \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\theta - \varphi) \sin \beta t \right\}$$

となります。定常項を加えますと、

$$I = I_{max} \cdot \left\{ \sin(\omega t + \theta - \varphi) + \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \sin(\theta - \varphi) \sin(\beta t - \Phi) - \frac{2}{\omega C \cdot \sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} \cdot e^{-\alpha t} \cos(\theta - \varphi) \sin \beta t \right\}$$

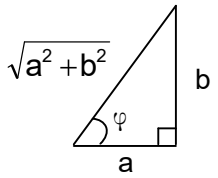
です。

三角関数の合成公式について

三角関数の合成公式について説明致します。

$a\sin\theta - b\cos\theta$

と言う式があったとします。a を底辺、b を高さとする直角三角形を作りますと、



$$\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

$a = \sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi$、$b = \sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi$ となります。この値を $a\sin\theta - b\cos\theta$ に代入しますと、

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos\varphi\sin\theta - \sqrt{a^2+b^2}\sin\varphi\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta-\varphi) \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$

となります。これを三角関数の合成公式と言います。

目次へ戻る